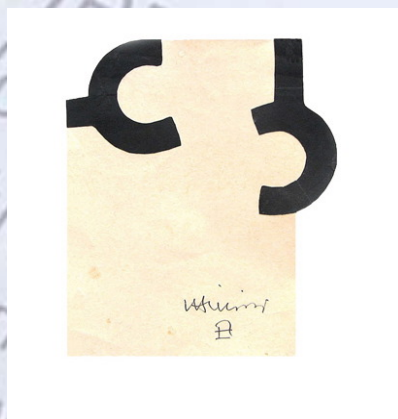
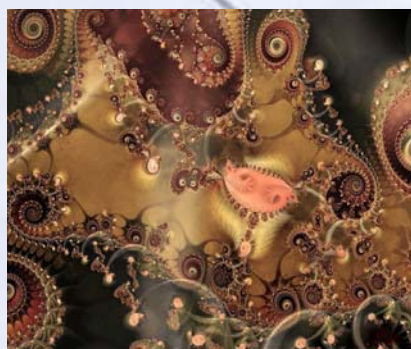


Matemàtiques aplicades a les ciències socials Curs 2007-08



Onofre Monzó del Olmo
Departament de matemàtiques
IES Veles e Vents. Torrent

Àlgebra lineal

1. Les matrius i els determinants
2. Els sistemes d'equacions lineals
3. La programació lineal

1 Les matrius i els determinats

Abans de començar

Per estudiar situacions en què intervenen gran quantitat de dades numèriques, és convenient estructurar-les per tal de poder analitzar millor el seu significat i per poder simplificar els procediments necessaris per a la seua manipulació. En veurem un exemple:

Una empresa fabrica cinc articles diferents i els comercialitza a través de tres distribuïdores. La gerent de l'empresa reflecteix les comandes en una taula de doble entrada com aquesta:

	C1	C2	C3	C4	C5
F1	1500	300	500	1200	500
F2	600	800	500	900	600
F3	2000	1000	0	0	1000

Taula 1 (comandes octubre)

Observa la taula, i contesta les següents preguntes:

- Quina distribuïdora ha demanat 900 unitats de l'article C4?
- De quin article ha demanat 2000 unitats l'empresa F3?
- Quin significat té el nombre 300 que apareix a la taula?
- Per tal d'organitzar la producció és necessari saber la demanda total de cada article. Com es pot obtenir?

Suposem que l'empresa, a més de les comandes que apareixen a la taula 1, tenia pendent de servir una certa part de comandes anteriors, segons el que recull la taula 2:

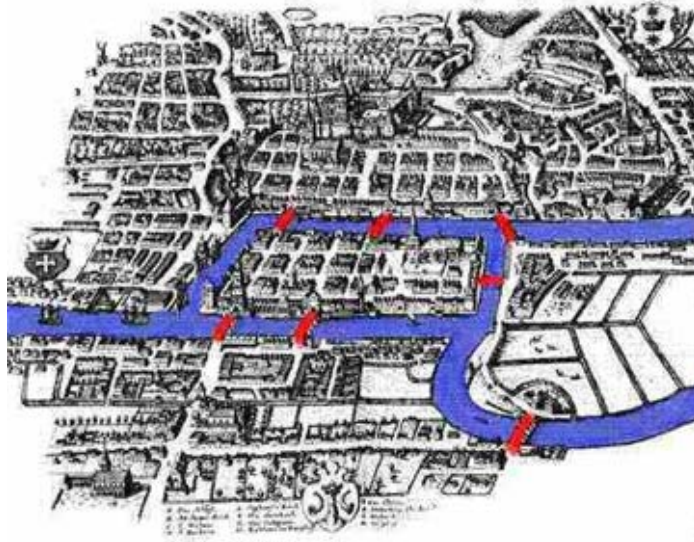
	C1	C2	C3	C4	C5
F1	0	500	200	0	0
F2	500	0	500	100	0
F3	0	0	0	1000	0

Taula 2 (pendent de servir: setembre)

Construeix una taula, que mostre el total d'unitats de cada un dels articles que s'ha de servir a cada distribuïdora. Quan la tingues, descriu el que has fet per omplir-la.

Els ponts de Königsberg

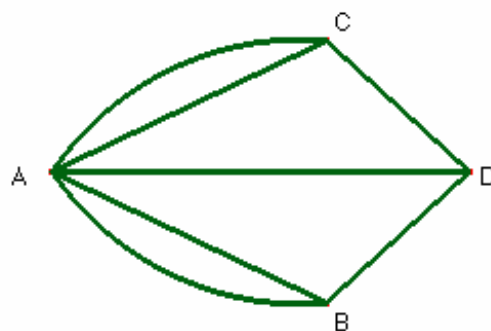
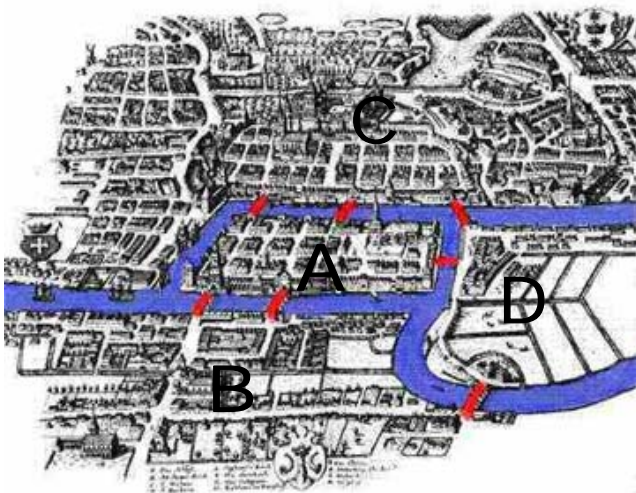
Königsberg és una ciutat russa pròxima a Kaunas, a la vora del Bàltic. Està travessada pel riu Pregel que la divideix en quatre parts connectades entre si per set ponts.



Els veïns es preguntaven quina seria la ruta per a travessar els set ponts passant només una vegada per cada u. Euler va demostrar que això era impossible, donant pas origen a una nova branca de les matemàtiques, la teoria de grafs i xarxes.

Com recolliries la informació per poder transmetre-la amb major claredat ?

Si anomenem cada zona i ho substituïm per un diagrama o graf que extraga el que és essencial del problema (dos regions connectades per mitjà d'un punt es representen per una línia que les uneix):



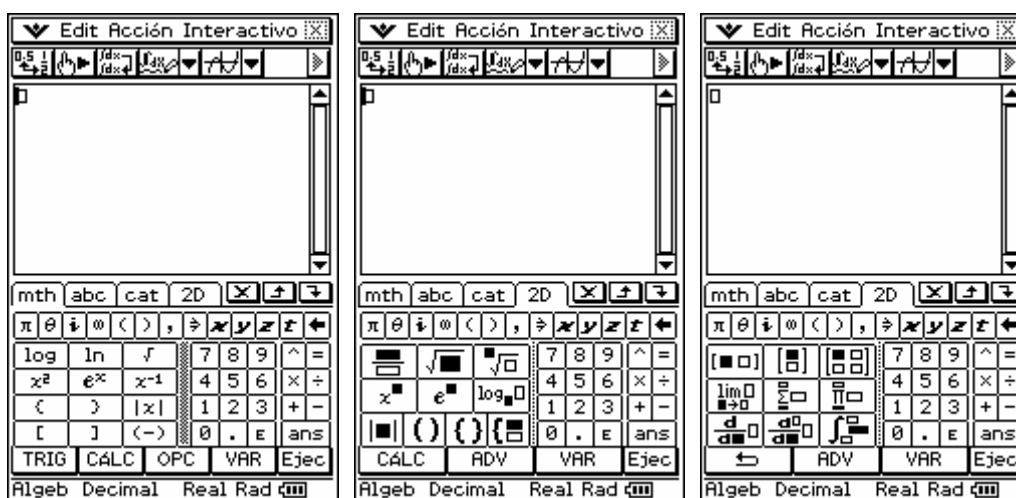
I ara ho podem posar a una taula:

	A	B	C	D
A	0	2	2	1
B	2	0	0	1
C	2	0	0	1
D	1	1	1	0

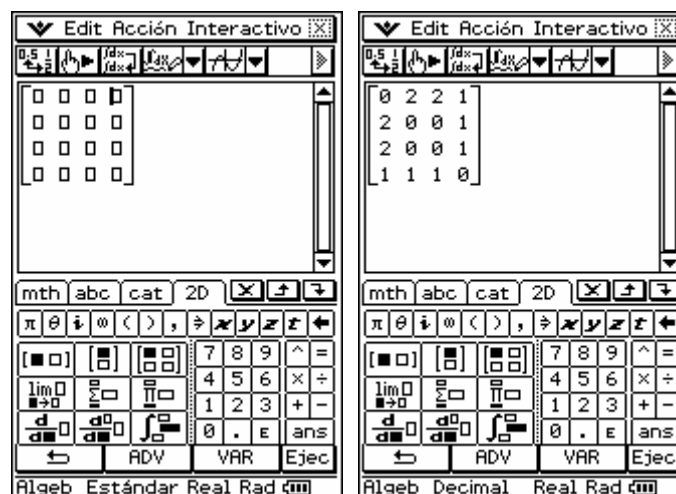
I per simplificar:

Al menú d'aplicacions polsem sobre *Principal* (Main) i després *Keyboard* per veure el teclat virtual.

Triem el teclat 2D i l'opció *CÁLC*:



Polsem els botons de columna, fila o matriu per crear-ne una, i introduïm les dades:



El número 2 -fila 3, col. 1-, indica que hi ha dues formes de passar de la regió A a la C.

Introducció

Les matrius i els determinants són ferramentes de l'àlgebra que faciliten l'ordenament de dades, així com la seua manipulació.

Els conceptes de matriu i tots els relacionats van ser desenvolupats bàsicament en el segle XIX per matemàtics com els anglesos J.J. Sylvester i Arthur Cayley i l'irlandés William Hamilton.

Les matrius es troben en aquells àmbits en què es treballa amb dades regularment ordenats i apareixen en situacions pròpies de les Ciències Socials, Econòmiques i Biològiques.

Matrius. Definició i primers exemples

Una matriu és un conjunt de nombres reals ordenats segons dos *índexs*. Els nombres se solen escriure en una disposició rectangular que reforça visualment el fet d'aquest *dobles* criteri d'ordenació. La matriu tindrà tantes files com indique el primer índex, i tantes *columnes* com indique el segon.

Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{Files de la matriu } A$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}}_{\text{Columnes de la matriu } A}$$

Abreujadament es pot expressar $A = (a_{ij})$. Cada element de la matriu porta dos subíndexs. El primer d'ells "i", indica la fila en què es troba l'element, i el segon, "j", la columna.

Així l'element a_{23} està a la fila 2 i columna 3. Les matrius sempre es representaran amb lletres majúscules.

Són exemples de matrius els següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A té 2 files i 2 columnes, direm que el seu grandària és 2 x 2. Quin element és a_{21} ?

B té 2 files i 3 columnes, direm que el seu grandària és 2 x 3. Quin element és b_{23} ?

C té 4 files i 3 columnes, direm que el seu grandària és 4×3 . Quin element és c_{42} ?

En general, si una matriu A té m files i n columnes, direm que el seu grandària o dimensió és $m \times n$ (es llig "m per n"), sempre en primer lloc el núm. de files i en segon lloc el de columnes.

Tipus de matrius

S'anomena *matriu nul·la* a la què té tots els elements zero.

Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és una matriu nul·la de grandària 2×5 .

S'anomena *matriu fila* (*vector fila*) quan només té una fila, és a dir la seva dimensió és $1 \times n$.

Per exemple,

$(1 \ 0 \ -4 \ 9)$ és una matriu fila de grandària 1×4 .

S'anomena *matriu columna* (*vector columna*) quan només consta d'una columna, és a dir la seva dimensió serà $m \times 1$, com per

exemple: $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$

és una matriu columna de grandària 3×1 .

Una matriu és *quadrada* quan té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir la seva dimensió és $n \times n$. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ del primer exemple anterior és quadrada de grandària 2×2 o simplement d'orde 2.

Un altre exemple de matriu quadrada és: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

d'orde 3.

Dins de les matrius quadrades anomenarem diagonal principal a la formada pels elements $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, sent la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En la matriu D de l'exemple anterior, la seua diagonal principal estaria formada per: 1, 5, 0.

S'anomena traça de la matriu a la suma dels elements de la diagonal. És a dir, Traça (A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$, i en el cas de D, Traça (D) = $1+5+0 = 6$.

La diagonal secundària és la formada pels elements: $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{nl}$.

En la matriu D estaria formada per: 3, 5, -3.

Una classe especial de matrius quadrades són les *matrius triangulars*. Una matriu és *triangular superior* si tots els elements per davall de la diagonal principal són nuls i *triangular inferior* si són nuls tots els elements situats per damunt de la dita diagonal.

Són exemples d'aquestes matrius:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Triangular inferior Triangular superior

Si una matriu és al mateix temps triangular superior i inferior, només té elements en la diagonal principal. Una matriu d'aquest tipus es denomina *matriu diagonal*.

Un exemple de matriu diagonal seria:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalment, si una matriu diagonal té en la seua diagonal principal només uns, es denomina matriu unitat o identitat. Se solen representar per I_n , on n és l'orde o grandària de la matriu. Algunes matrius identitat són:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicacions de les matrius

Les matrius es fan servir en el context de les ciències com a elements que serveixen per a classificar valors numèrics atenent a dos criteris o variables.

Globus

Un importador de globus els importa de dos colors, taronja (T) i maduixa (M). Tots ells s'envasen en paquets de 2, 5 i 10 unitats, que es venen al preu (en euros) indicat per la taula següent:

	2 unitats	5 unitats	10 unitats
Color T	0'04	0'08	0'2
Color M	0'03	0'05	0'08

Sabent que en un any es venen el següent nombre de paquets:

	Color T	Color M
2 unitats	700000	50000
5 unitats	600000	40000
10 unitats	500000	500000

Resumir la informació anterior en 2 matrius A i B, de grandària respectiva 2×3 i 3×2 que arrepleguen les vendes en un any (A) i els preus (B).

L'IVE

L' IVE (Institut Valencià d'Estadística) vol saber la despesa de les famílies valencianes durant els anys 2002, 2003, 2004, 2005 i 2006. Per a això tria 4 famílies F1, F2, F3, i F4, i els consums i preu del pa, carn i mantega.

CONSUMS

Pa	Carn	Mant.	
430	157	8	F1
545	210	1	F2
1230	80	3	F3
860	110	0	F4

PREUS

2002	2003	2004	2005	2006	
0,49	0,52	0,57	0,6	0,63	Pa
4,63	4,21	4,51	4,81	5,17	Carn
5,05	5,47	4,81	6,01	6,31	Mant.

Despeses totals

	2002	2003	2004	2005	2006
F1	978,01				
F2	1244,40				
F3	988,25				
F4	930,70				

- Completa la matriu anterior .
- Quina relació hi ha entre les tres matrius que apareixen?

Fabricació de joguets

La marca Mattoy fabrica quatre tipus d'animals de peluix: óssos panda, cangurs, conills i dinosaures. Per a produir un nino fa falta tallar al material, cosir i donar l'acabat. La següent taula mostra el nombre d'hores necessari en cada tipus de treball per a cada tipus de nino:

	Ós Panda	Cangur	Conill	Dinosaure
Tallar	0'5	0'8	0'4	1'0
Cosir	0'8	1'0	0'5	1'5
Acabat	0'6	0'4	0'5	2

La fàbrica ha rebut les comandes per als mesos d'octubre i novembre. En la següent taula es mostra el nombre de cada tipus de ninos que han de fabricar cada mes.

	Octubre	Novembre
Ós Panda	1.000	1.100
Cangur	600	850
Conill	800	725
Dinosaure	2.500	2.000

- Hem de calcular el nombre total d'hores de treball per a octubre i novembre. Com ho calcularíem?
- L'empresa té tres fàbriques: una en el nord, una altra en el centre i una altra en el sud del país. En esta taula es donen els salaris en pessetes que cobren a l'hora cada tipus de treballador en cada una de les fàbriques:

	Tallar	Cosir	Acabat
Nord	750	900	840
Centre	700	800	760
Sud	840	1.050	1000

Volem saber quant costa produir cada tipus de nino en cada una de les fàbriques. Arrodoneix els resultats a dos decimals

La urbanització

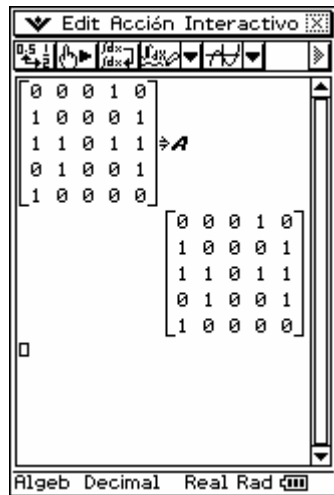
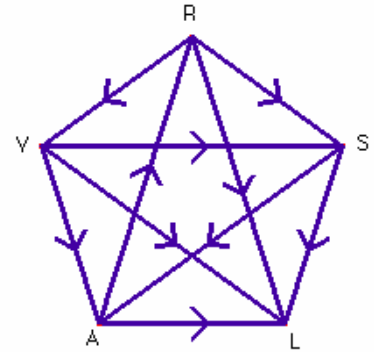
Un constructor fa una urbanització amb tres tipus de vivendes: S (senzilles), N (normals) i L (luxe). Cada vivenda del tipus S té 1 finestra gran, 7 mitjanes i 1 xicoteta. Cada vivenda del tipus N té 2 finestres grans, 9 mitjanes i 2 xicotetes. I cada vivenda del tipus L té 4 finestres grans, 10 mitjanes i 3 xicotetes.

Cada finestra gran té 4 vidres i 8 frontisses; cada finestra mitjana té 2 vidres i 4 frontisses; i cada finestra xicoteta té 1 vidre i 2 frontisses. Al seu torn cada vidre costa 10 €. i cada frontissa 2 €.

Quant gasta el constructor en vidres i frontisses en cada vivenda?

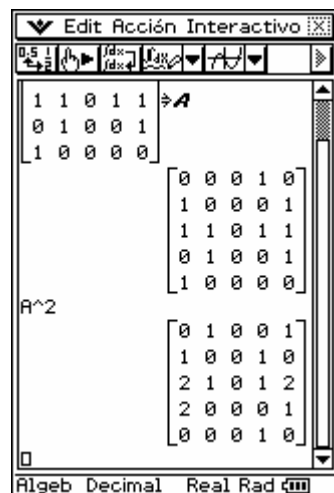
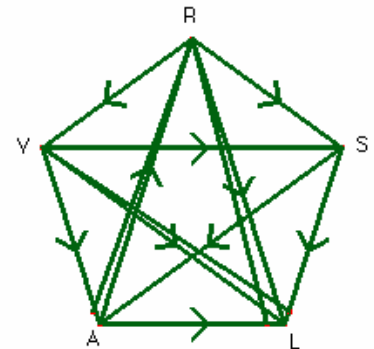
Estudi de les relacions en un grup

Podem fer servir les matrius per a analitzar les relacions dins d'un grup. En aquest diagrama establim amb una fletxa la influència que exerceix una persona sobre una altra en un grup de cinc: Rosa, Sílvia, Lluís, Aícia i Vicent.



És La matriu associada en la que l'1 que apareix en la fila 3, columna 2 vol dir que Sílvia (col. 2) exerceix influència sobre Lluís (fila 3).

El càlcul del quadrat de la matriu A^2 té el significat que podem veure al diagrama de la dreta, la quantitat d'influències que exerceix cada un d'ells cap als altres, però per mitjà d'una altra persona, és a dir, serien influències de segon orde que han de realitzar-se per mitjà d'una altra persona.



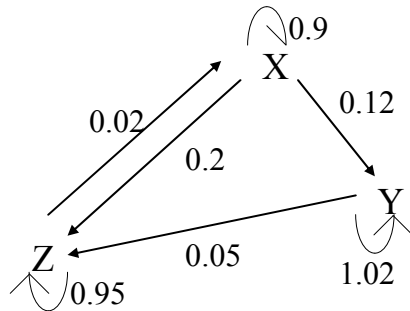
El 2 que apareix en la fila 3, columna 5 són les dos relacions de domini que exerceix Vicent sobre Lluís, una per mitjà d'Aícia i una altra amb Sílvia com a intermediària.

A^0 seria la matriu unitat, cada un d'ells exerceix control sobre si mateix.

Calcula i interpreta A^3 i $A^0+A+A^2+A^3$

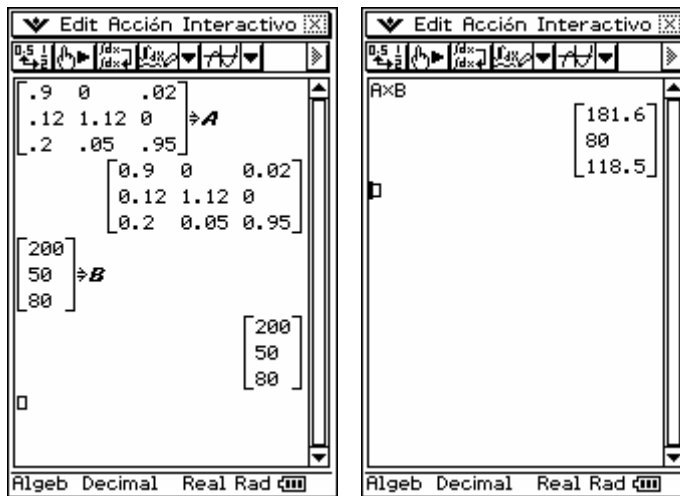
Matrius de Leslie. Moviments migratoris entre ciutats

Tenim un exemple interessant en l'estudi de les migracions entre ciutats amb les matrius de Leslie molt utilitzades en biologia per a l'estudi de l'evolució de poblacions.



A l'esquerra tenim el graf (diagrama) de la relació entre tres ciutats X, Y i Z. Cada fletxa indica la població que emigra d'una ciutat a una altra al cap d'un determinat període de temps -10 anys al nostre cas -. Per exemple, la Y s'incrementarà en un 2% en deu anys i a més rebrà el 12% de la població de X, mentre emigra el 5% emigra cap a Z.

Si partim d'una població - en milers d'habitants -, de 200 en X, 50 en Y i 80 en Z, al cap de 10 anys la quantitat d'habitants de cada ciutat vindrà donada pel producte de les matrius:

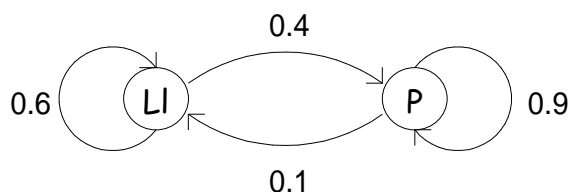


Amb la utilització d'una calculadora gràfica calcula la població de les tres ciutats al cap de 10, 20, ... , 100 anys.

Propietat de la vivenda

En un estudi recent s'ha trobat que cada any en la ciutat de Metròpolis el 40% de les famílies que lloguen la vivenda en què resideixen compren una vivenda, mentre que el 10% dels propietaris de vivenda passen a llogar el seu allotjament. Si en l'actualitat un 45% dels habitants de Metròpolis són propietaris, com canviarà aquest percentatge en el futur?

Com canvia la distribució final si canvia el percentatge inicial de propietaris. Passarà el mateix amb qualsevol matriu de transició?



Operacions amb matrius

Addició i subtracció

Donades dos matrius A i B podem realitzar la seua suma o diferència d'acord amb la següent regla. Per a sumar o restar dos matrius *de la mateixa grandària*, se sumen o resten els elements que es troben en la mateixa posició, resultant una altra matriu de la mateixa grandària.

Per exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2×3 2×3 2×3

Si les matrius tenen diferent grandària, no es poden sumar o restar entre si.

L'addició de matrius en cada conjunt de matrius de dimensió $m \times n$ és una *lei de composició interna* (la matriu suma és també un element del conjunt de matrius de dimensió $m \times n$), amb les següents propietats:

- a) Commutativa: $A + B = B + A$
- b) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- c) Element neutre: La matriu nul·la de la grandària corresponent: $O + A = A + O = A$
- d) Element oposat de A: La matriu $-A$, que resulta de canviar de signe als elements de A: $A + (-A) = -A + A = O$

Exemple:

Si

de suma de dos nombres es pot estendre sense problemes a tres o més nombres. Igual ocorre amb les matrius. Per exemple:

Donades $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ i $D = (d_{ij})$, matrius de la mateixa dimensió, la matriu suma és $A+B+C+D = (a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}+d_{ij})$.

Exercicis:

1.- Les exportacions, en milions d'euros, de 3 països A, B, C a altres tres X, I, Z, en els anys 2005 i 2006 vénen donades per les matrius:

$$A_{2005} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 11 & 6.7 & 0.5 \\ 14.5 & 10 & 1.2 \\ 20.9 & 3.2 & 2.3 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad A_{2006} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X & Y & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 13.3 & 7 & 1 \\ 15.7 & 11.1 & 3.2 \\ 21 & 0.2 & 4.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Calcula i expressa en forma de matriu el total d'exportacions per al conjunt dels dos anys.

Quants milions ha exportat el país B al Z en total?

Calcula l'increment de les exportacions de l'any 2005 al 2006 amb les dades de l'exemple anterior.

2.- Calcula x, i, z en la suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Calcula a, b, c perquè es complisca la igualtat:

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Biblioteca

En una biblioteca anoten els préstecs diaris de llibres així:

	INF.	CIENT.	DIVULG.	C. FICCIÓ	AVENTURES
CASA	150	120	70	45	95
BIBLIOTECA	190	80	210	90	170

El director vol fer balanç i per això, suposa que tots els dies (dilluns a dissabte) el nombre de llibres prestats en les distintes modalitats roman constant.

Expressa en forma matricial el nombre de llibres prestats en les distintes modalitats en una setmana i en un mes.

Producte per un nombre real

Donada una matriu qualsevol A i un nombre real k , el producte $k \cdot A$ es realitza multiplicant tots els elements de A per k , resultant una altra matriu de la mateixa grandària. (Evidentment la mateixa regla serveix per a dividir una matriu per un nombre real). Per exemple:

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$

Donats $k \in \mathbb{R}$ i una matriu $A = (a_{ij})$, definim el producte de l'escalar k , per la matriu A com una matriu $k \cdot A$ de la mateixa dimensió que A i tal que: $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$.

La matriu oposada d'una matriu A la podem considerar també com el producte del nombre -1 per la matriu A : $-A = (-1) \cdot A$.

La multiplicació d'escalars per matrius en cada conjunt de matrius de dimensió $m \times n$ és una *lei de composició externa* (tot i efectuar-se entre elements de conjunts diferents, la matriu resultant és també un element del conjunt de matrius de dimensió $m \times n$), amb les següents propietats (noteu que, encara que emprem la mateixa notació, apareixen dos signes de multiplicació amb diferent significat):

Si k i d són nombres reals i A i B matrius amb la mateixa dimensió

- a) Associativa: $k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$
- b) Distributiva respecte de la suma de matrius: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- c) Distributiva respecte de la suma de números: $(k + d) \cdot A = k \cdot A + d \cdot A$
- d) Element neutre d'escalars, el número 1: $1 \cdot A = A$

Demostració de la propietat associativa:

La matriu $k \cdot A$ tindrà la mateixa dimensió que la matriu A i cada un dels seus elements s'obté multiplicant k pel corresponent element de A . És a dir:

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$$

Per a multiplicar d , per aquesta nova matriu, repetirem el procediment. Cada element serà multiplicat per d , i tindrem:

$$d \cdot (k \cdot A) = (d \cdot (k \cdot a_{ij}))$$

Però com que d , w i cada un dels a_{ij} són nombres reals, podem eliminar els parèntesis de l'última expressió, i tindrem:

$$d \cdot (k \cdot A) = (d \cdot k \cdot a_{ij})$$

És a dir, per a obtenir $d \cdot (k \cdot A)$, basta amb multiplicar el producte $d \cdot k$, per cada element de A . Per tant, s'obté el mateix resultat que en fer l'operació $(d \cdot k) \cdot A$.

Exercicis:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, troba una matriu X que verifiqui

l'equació: $2X - 4A = B$

2. Determina les matrius X i Y sabent que:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Transposició de matrius

Donada una matriu qualsevol A , s'anomena matriu transposició d' A , i es representa per A^t a la matriu que resulta d'intercanviar les files i les columnes de A .

Per exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, llavors la matriu transposició

d' A és:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentment, si A és una matriu de grandària $m \times n$, la seua transposició A^t tindrà grandària $n \times m$, per tant el nombre de columnes passa a ser el de files i viceversa. Si la matriu A és quadrada, la seua transposició tindrà la mateixa grandària.

Propietats:

a) $(A^t)^t = A$, és a dir, la transposició de la transposició és la matriu inicial.

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ Basant-se en aquesta nova operació, podem definir altres dos classes de matrius, que són:

Matriu simètrica, que és aquella per a la que es compleix que $A^t = A$, per exemple la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

és simètrica (comprova-ho).

En una matriu simètrica, els elements són simètrics respecte a la diagonal principal.

Questió:

Pot ser simètrica una matriu que no siga quadrada? Per què?

Matriu antisimètrica, és aquella per a la que es compleix que $A^t = -A$. Per exemple:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

és antisimètrica (comprova-ho).

En una matriu antisimètrica, els elements de la diagonal principal són sempre nuls (per què?), i els restants són oposats respecte a la dita diagonal.

Exercicis:

1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula

$3A^t - B^t$.

2. Obtindre les matrius X e Y que verifiquen els sistemes:

$$a) \begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases} \quad b) \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Producte de matrius

Hem vist en les operacions que hem definit anteriorment que, en el primer cas (l'addició de matrius), es tracta d'una operació *interna per* una dimensió determinada i que en el segon cas (multiplicació d'un nombre per una matriu), es tracta d'una operació *externa*. L'operació que ara introduïm no té, en general, cap d'aquestes qualitats. La raó la veurem de seguida:

Per poder multiplicar dues matrius és necessari que el nombre de columnes de la primera i el nombre de files de la segona siguin

iguals. Això és així perquè cada element de la matriu producte s'obté com la suma dels productes element a element d'una fila de la primera per una columna de la segona:

Si $A_{m \times n} = (a_{ij})$ i $B_{n \times p} = (b_{ij})$, la matriu producte P tindrà dimensió $m \times p$ (nombre de files de A per nombre de columnes de B) i cada element p_{ij} de $P_{m \times p}$ s'obté multiplicant la fila i de A per la columna j de B , de la següent forma:

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj})$$

Vegem-ho per mitjà d'un exemple:

Per multiplicar les matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-2) \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) = -1$$

Per parlar de les propietats d'aquesta operació, ho farem començant per una que no es verifica: la propietat commutativa. De fet, si existeix el producte $A \cdot B$, no necessàriament ha d'existir el producte $B \cdot A$: per exemple, $A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 5}$ és una multiplicació que sempre donarà una matriu producte de dimensió 3×5 , però no serà pertinent plantejar la multiplicació de B per A , perquè 5, el nombre de columnes de B i 3, el nombre de files de A , no són iguals.

Però fins i tot, quan considerem matrius amb les quals és possible plantejar les dues multiplicacions, no necessàriament els productes coincidirán. Ho veurem amb un exemple molt senzill:

$$\text{Siguen } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tenim que: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix} \text{ i } B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 13 & 34 \end{pmatrix}$$

Nomina

Una empresa és propietària de dues factories, amb les plantilles de treballadores i treballadors que es recullen en la taula 1. En la taula 2 es fan constar els salaris individuals mensuals en euros, que s'han de pagar al personal de cada categoria en cada una de les factories. Utilitza el càlcul matricial per tal de determinar la nomina total que haurà de pagar l'empresa en cada una de les dues factories.

TAULA 1 (distribució del personal)

	Categ. A	Categ. B	Categ. C	Categ. D
Factoria 1	2500	1910	1025	810
Factoria 2	2825	2025	950	742

TAULA 2 (salari mensual,€)

	Categ. A	Categ. B	Categ. C	Categ. D
Factoria 1	2	4	50	220
Factoria 2	4	25	100	514

Propietats del producte de matrius

- a) Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
 b) Distributiva respecte de la suma:
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
 c) Element neutre, la matriu identitat corresponent, si A és $m \times n$:

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_m \cdot A = A$$

- d) En general *el producte de matrius no és commutatiu*:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Hom pot veure exemples als exercicis anteriors. Aquesta és una propietat molt important.

- e) El producte de dos matrius no nul·les A i B pot donar lloc a una matriu nul·la:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2x3 3x1 2x1

Es diu que el conjunt de les matrius amb l'operació producte té *divisors de zero*, és a dir, hi ha matrius no nul·les el producte del qual és nul.

La matriu inversa

Sabem ja multiplicar matrius i hem vist algunes de les propietats d'aquesta operació.

Recordem, en primer lloc, que no sempre és possible efectuar la multiplicació de dues matrius, i en segon lloc, que encara que siga possible fer aquesta multiplicació, en general no és commutatiu, és a dir $A \cdot B$ és diferent de $B \cdot A$.

En el cas particular de què tractem amb *matrius quadrades del mateix orde* A i B , és clar que podem efectuar els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$, que donaran com resultat una altra matriu del mateix orde, encara que, com ja s'ha dit, les matrius resultants seran, en general, distintes.

Sabem també que l'element neutre del producte de matrius és la matriu identitat I_n .

Per analogia amb el cas dels nombres reals, podem plantejar-nos la qüestió següent:

Si tenim un nombre real, per exemple el 2, podem interessar-nos en buscar l'invers del 2 per al producte, és a dir un nombre real x tal que $2 \cdot x = 1$, el producte de 2 per x siga igual a l'element neutre, l'1. Evidentment, en el cas dels nombres reals és ben fàcil aïllar x per a obtenir l'1, en el nostre cas, que $x = 1/2$, és a dir, l'invers d'un nombre real és un altre nombre que multiplicat per ell dóna l'element neutre, l'1.

Tot nombre real, excepte el 0, té invers.

Traslladant açò a les matrius, ens podem plantejar si donada una matriu quadrada A d'orde n , qualsevol, existeix la seua inversa X per al producte de matrius, tal que

$$A \cdot X = I_n$$

és a dir, el producte de A per la seua inversa produeix l'element neutre matricial, la matriu identitat I_n .

No obstant, hi ha algunes diferències respecte al cas dels nombres reals:

1) No podem "aïllar" la matriu X del mode $X = \frac{I_n}{A}$, perquè no hem definit la divisió de matrius.

2) No totes les matrius quadrades no nul·les tenen matriu "inversa" (siga el que siga, per analogia amb els nombres).

Definim, en primer lloc, el terme de matriu inversa:

Donada una matriu quadrada d'orde n , A , es diu que A és *invertible* (o que posseeix inversa o que és no singular o que és regular), si hi ha una altra matriu del mateix orde, denominada matriu inversa d' A i representada per A^{-1} i tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \text{ i } A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no té inversa, es diu que és *singular* o *no invertible*.

Si una matriu té inversa, la dita matriu inversa és única (només hi ha una). Per a calcular la dita matriu inversa, podem fer servir varies vies:

Per exemple:

Mètode directe:

Calculem la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hem de trobar una matriu

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, de forma que:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1/3 \quad y = 1/3 \quad z = -1/3 \quad t = 2/3 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Mètode de Gauss-Jordan:

Donada una matriu A_n , regular, un mètode eficient per a calcular-ne la matriu inversa és el següent:

- Es forma una nova matriu ampliant la matriu A amb les columnes de la matriu identitat I_n .
- Es transforma aquesta matriu ampliada pel mètode de Gauss, fins a obtenir la corresponent matriu escalonada reduïda.

S'anomena transformació elemental en una matriu a:

- T1) Multiplicar o dividir una fila per un nombre real diferent de zero.
- T2) Sumar o restar a una fila una altra multiplicada per un nombre real no nul.
- T3) Intercanviar el lloc de dos files entre si.
- En aquesta matriu, a l'esquerra veurem les columnes de I_n , i a la dreta, les corresponents a A^{-1} .

Exemple:

Siga $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprovem en primer lloc si és una matriu

regular: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$

Com veiem que $\det A \neq 0$, tenim la seguretat que existeix A^{-1} . Si no ferem aquesta comprovació, quan es tractara d'una matriu singular ho

detectaríem perquè durant el procés de transformació de Gauss obtindríem alguna fila de la matriu amb tots els elements nuls. En aquest punt pararíem i conclouríem que la matriu no tindria inversa. Així i tot, sembla més còmode decidir-ho prèviament amb el càlcul del determinant, que és un procés més senzill.

Formem la matriu ampliada amb la matriu identitat d'ordre 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Emprant com a *pivot* l'1 que ocupa la posició (1, 1), fem zeros en les posicions (2, 1) i (3, 1):

F_2 és substituïda per $F_2 - F_1$ i F_3 és substituïda per $F_3 - 2 \cdot F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Amb l'1 que ocupa la posició (2, 2) com a *pivot*, fem un zero en la posició (3, 2):

F_3 és substituïda per $F_3 + 3 \cdot F_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Dividim per 4 la

fila 3:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Utilitzant com a pivot l'1 que hem format amb aquesta darrera transformació (el que ocupa la posició (3, 3)), fem un zero en la posició (2, 3):

F_2 és substituïda per $F_2 - F_3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Finalment, emprant com a pivot l'1 que ocupa la posició (2, 2), fem un zero en la posició (1, 2):

F_1 és substituïda per $F_1 - F_2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
. Tenim doncs que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Si al realitzar el mètode de Gauss-Jordan en algun moment alguna fila és de zeros, la matriu no té inversa.

Quant major siga l'orde de la matriu, millor és aquest mètode enfront del directe.

Més endavant veurem com calcular la matriu inversa fent servir determinants.

Rang d'una matriu

Un concepte molt important relacionat amb les matrius és el de rang. El concepte de rang es troba lligat al de "independència lineal" de files o columnes d'una matriu, però no s'introduirà d'aquesta manera perquè es requereixen conceptes que no coneixem.

Tenim prou en saber que es defineix el rang d'una matriu com el nombre màxim de files o columnes linealment independents.

No obstant, el càlcul del rang d'una matriu l'abordarem des d'una altra perspectiva, utilitzant el mètode de Gauss.

Suposem que tenim una matriu *qualsevol* A a la que apliquem el mètode de Gauss a fi de simplificar-la el més possible (és a dir, aconseguint que tinga el nombre més gran de zeros possible), realitzant operacions elementals en files.

Anomenarem *rang de la matriu* A i el representarem per $\text{Rg}(A)$ al nombre de files no nul·les de la matriu després d'aplicar-li el mètode de Gauss.

Propietats:

- Si A és una matriu de grandària $m \times n$ *no nul·la* es compleix que: $1 \leq \text{Rg}(A) \leq \min\{m, n\}$
- Una matriu quadrada A té inversa $\Leftrightarrow \text{Rg}(A)$ és màxim.

Determinants

Introduïrem a continuació el concepte de determinant associat a una matriu quadrada. Aquest concepte permet simplificar operacions matricials com ara el càlcul del rang o de la matriu inversa.

Definició:

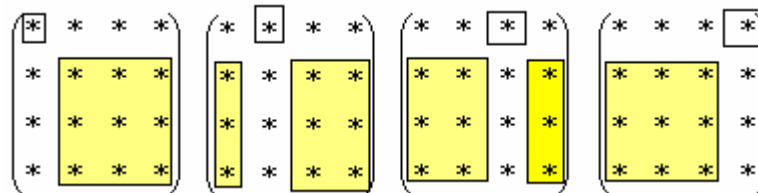
Si és una matriu 2×2 es defineix el determinant de la matriu A , i s'expressa com $\det(A)$ o bé $|A|$, com el *nombre*:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Per a definir determinants de matrius d'orde major que 2 és necessari introduir prèviament alguns conceptes.

Donada una matriu quadrada A d'orde n , definim el *menor complementari* d'un element de A , a_{ij} , com el determinant de la matriu que s'obté al suprimir la fila i i la columna j en què es troba tal element a_{ij} . Es representa per M_{ij} .

Fixem-nos en el següent esquema, on la matriu quadrada ombrejada indica el determinant que hem de calcular.



Estretament lligat al concepte de menor complementari es troba el d'adjunt d'una matriu.

Donada una matriu quadrada A d'orde n , definim l'*adjunt d'un element* a_{ij} de A com el nombre:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

és a dir, no és més que el menor complementari corresponent acompanyat d'un signe més o menys depenent de la fila i la columna en què es trobe l'element en qüestió.

Definició: Donada una matriu quadrada A de grandària n es defineix el seu *determinant* com la suma del producte dels elements d'una línia qualsevol de la matriu (fila o columna) triada, pels seus corresponents adjunts.

Es pot demostrar, encara que la dita demostració excedeix els continguts del curs, que el valor del determinant *no depèn de la fila o columna triada* per a calcular-lo.

La regla de Sarrus

La definició de determinant és prou molesta i es fa molt més pesada a mesura que augmenta l'orde de la matriu A .

En el cas de les matrius quadrades d'orde 3, esta regla facilita el càlcul de dits determinants.

Si la matriu és $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, llavors el determinant d' A es

calcula per mitjà de la resta de dos expressions obtingudes de la manera següent:

Anomenarem sumands positius als obtinguts al multiplicar:

- Els elements de la diagonal principal, $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$.

- Els elements de la línia paral·lela superior a la diagonal principal per l'element aïllat del cantó inferior esquerra: $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$.
- Els elements de la línia paral·lela inferior a la diagonal principal per l'element aïllat del cantó superior dreta: $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$.

Gràficament:

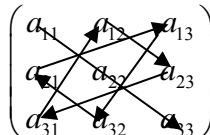


Figura: Sumands positius

Anomenarem sumands negatius als obtinguts al multiplicar:

- Els elements de la diagonal secundària, $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$.
- Els elements de la línia paral·lela superior a la diagonal secundària per l'element aïllat del cantó inferior dreta: $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.
- Els elements de la línia paral·lela inferior a la diagonal secundària per l'element aïllat del cantó superior esquerra: $a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$.

Gràficament:

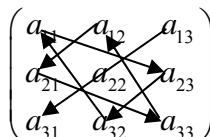


Figura: Sumands negatius

I llavors $\det(A) = \text{Sumands positius} - \text{Sumands negatius}$.

Per exemple, en el cas de la matriu anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ es té que aplicant la regla de Sarrus:}$$

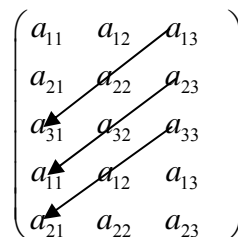
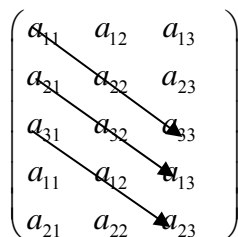
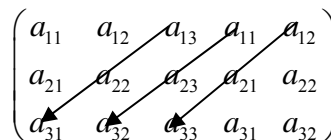
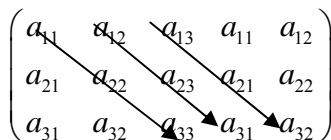
$$\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 - (2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 2) = 4 - 8 - 6 + 8 = -2$$

Altra regla per calcular determinants 3x3 és la següent:

S'escriuen a la dreta o davall de la matriu les dues primeres línies. La diagonal principal i les seues dues paral·leles seran sumands positius i la diagonal secundària i les seues dues paral·leles sumands negatius:

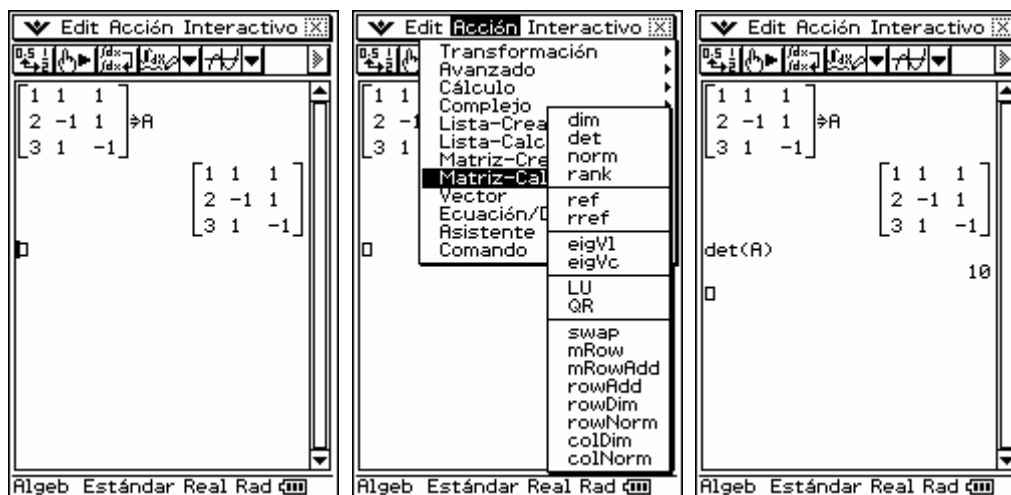
Sumands positius

Sumands negatius



Determinants amb calculadora gràfica

Una vegada introduïda la matriu i emmagatzemada a una variable farem servir l'ordre Acció\matriz-Calculador\det:



Propietats dels determinants

Algunes propietats importants que tenen els determinants, i que s'enuncien sense demostració, són:

1. Si una matriu té una línia (fila o columna) de zeros, el determinant val zero.

Aquesta propietat és evident, ja que per definició de determinant, basta triar dita línia, per a desenvolupar i el determinant serà 0.

2. Si una matriu té dos files iguals o proporcionals, el seu determinant és nul.

3. Si permutem dos línies paral·leles d'una matriu quadrada, el seu determinant canvia de signe,

per exemple:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 91 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -91$$

4. Si multipliquem tots els elements d'una línia d'un determinant per un nombre, el determinant queda multiplicat per eixe nombre. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 91 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 182$$

$$\text{però } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & -4 & -16 & 2 \end{vmatrix} = 16 \cdot 91 = 1456$$

5. Si a una línia d'una matriu se li suma una altra línia multiplicada per un nombre, el determinant no canvia. Aquesta propietat permet utilitzar un mètode més senzill per a calcular determinants d'orde major que 3.

6. El determinant d'una matriu és igual al de la seua transposició,
 $|A| = |A^t|$

7. Si A té matriu inversa, A^{-1} , es verifica que:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Una estratègia a tindre en compte en aquest cas de determinants d'orde 4 o superior, o inclús de orde 3 si la matriu és complexa, és el mètode de "fer zeros", ja que el valor del determinant no varia al realitzar a la matriu certes transformacions elementals en files, com indica la propietat 5 anterior, si bé hem de tindre cura a l'hora d'aplicar la dita propietat.

Així, la millor forma de calcular un determinant és fer zeros en una fila o columna i desenvolupar per la dita fila o columna, perquè llavors sols haurem de calcular un adjunt.

Càlcul de la matriu inversa per mitja de determinants

Donada una matriu quadrada A, s'anomena matriu adjunta de A, i es representa per $\text{Adj } A$, la matriu que s'obté en substituir cada element pel seu adjunt.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -2$$

Els adjunts de cada element són:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2 & A_{12} &= -4 & A_{13} &= -7 \\ A_{21} &= 0 & A_{22} &= -2 & A_{23} &= -2 \\ A_{31} &= -2 & A_{32} &= 4 & A_{33} &= 6 \end{aligned}$$

i la matriu adjunta:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A continuació trobem la transposada i la multipliquem per la matriu A

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Resumint, per trobar la matriu inversa hem d'aplicar la fórmula següent: $A^{-1} = \frac{(\text{adj}A)^t}{\det A}$

Aplicació dels determinants al càlcul del rang

Els determinants també proporcionen una forma senzilla de calcular el rang d'una matriu qualsevol.

Una definició alternativa de rang d'una matriu és:

El *Rang d'una matriu A* és la grandària del major menor complementari no nul que estiga inclòs dins de la matriu.

Problemes PAU

2002

S-A Problema 2. Obteniu de forma raonada la matriu X que verifica $A \cdot X = 2B - C$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

2003

J-A Problema 1. Donada l'equació matricial següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Obteniu de forma raonada els valors de x, y, z.

2004

J-A Problema 1. Donades les matrius

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X que verifica l'equació $\mathbf{AXB} = 2\mathbf{C}$.**S-A Problema 1.** Obteniu la matriu X que verifica $\mathbf{AX} - \mathbf{B} = 3\mathbf{X}$, essent:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2005

S-B Problema 1. Calculeu la matriu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica l'equació

$$\text{matricial } \mathbf{AXB} = \mathbf{C}, \text{ sent: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

2006

S-B Problema 1. Determina la matriu A que verifica l'equació

$$\mathbf{AB} + \mathbf{A} = 2\mathbf{B}^t, \text{ on } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}^t \text{ representa la matriu transposada de}$$

 \mathbf{B} .

2007

J-A Problema 1. Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - 5\mathbf{A}^{-1}$,sent \mathbf{A}^t i \mathbf{A}^{-1} les matrius transposada i inversa de \mathbf{A} , respectivament.

2 Els sistemes d'equacions lineals

Introducció

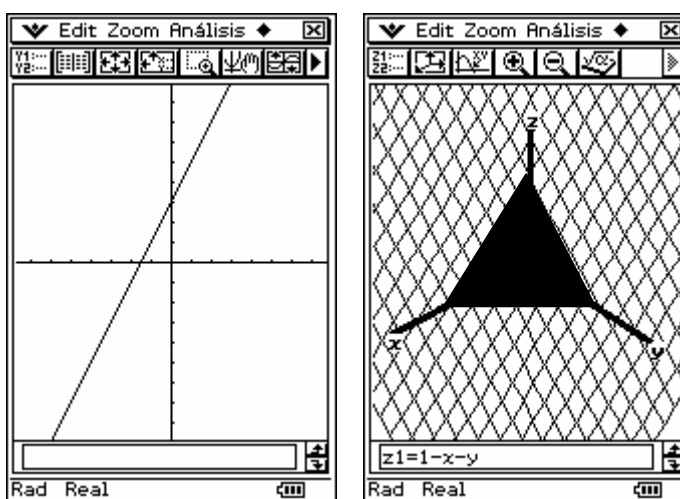
Es denomina equació lineal a aquella que té la forma d'un polinomi de primer grau, és a dir, les incògnites no estan elevades a potències, ni multiplicades entre si, ni en el denominador.

Per exemple, $3x + 2y + 6z = 6$ és una equació lineal amb tres incògnites.

Com és ben sabut, les equacions lineals amb 2 incògnites representen una recta en el pla.

Si l'equació lineal té 3 incògnites, la seua representació gràfica és un pla en l'espai.

Un exemple d'ambdós representacions pot observar-se en la figura:



Representació gràfica de la recta $y - 2x = 3$ en el pla i del pla $x + y + z = 1$ en l'espai.

L'objectiu del tema és l'estudi dels sistemes d'equacions lineals, és a dir, un conjunt de diverses equacions lineals.

Definició i classificació dels sistemes d'equacions lineals

Una *solució* del sistema és un conjunt ordenat de nombres reals $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ de manera que en substituir les incògnites x_1 per S_1 , x_2 per S_2 etc. les equacions se satisfan alhora.

Resoldre un sistema d'equacions, és trobar les solucions del sistema.

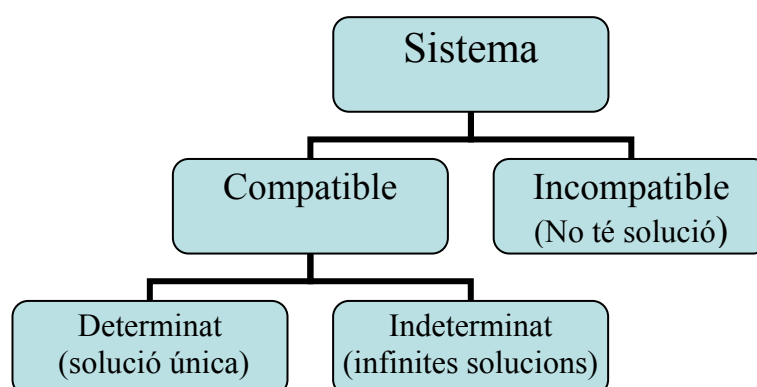
Direm que dos equacions són *equivalents* si tenen les mateixes solucions, o geomètricament representen la mateixa recta o pla.

Per resoldre un sistema d'equacions, caldrà transformar el sistema en sistemes d'equacions equivalents al primer mitjançant les propietats corresponents, i que quede un sistema el més reduït possible aplicant les propietats de les equivalències d'equacions i les prioritats vistes en les equacions.

Propietats d'equivalència dels sistemes d'equacions:

- 1) Si canviem l'ordre de les equacions, s'obté un sistema equivalent.
- 2) Al canviar una de les equacions per un altra equivalent, el sistema serà equivalent.
- 3) Si sumem o restem costat a costat dues o més equacions d'un sistema i substituïm una d'elles (de les que s'han sumat) per l'equació resultant, s'obté un sistema equivalent.
- 4) Si en una equació aïllem una de les lletres i la substituïm en una altra, queda un sistema equivalent.

Podem classificar els sistemes de la següent manera:



$$\text{Siga el sistema: } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\},$$

anomenem:

$$\text{Matriu del sistema } \rightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriu ampliada del sistema } \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

És *compatible determinat* quan el sistema té una única solució. Així,

$$\text{per exemple, el sistema: } \left. \begin{array}{l} 5x + 5y + z = 12 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + z = 6 \end{array} \right\}, \text{ té la solució } (1, 1, 2) \text{ i cap}$$

altra terna de nombres és solució del sistema, cosa que es pot comprovar analitzant el sistema escalonat equivalent:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 5y + z = 12 \\ 5y - z = 3 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

És *compatible indeterminat* quan el sistema té infinites solucions. Per

$$\text{exemple, el sistema: } \left. \begin{array}{l} 5x + 6y + z = 12 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{array} \right\}, \text{ és equivalent al següent}$$

$$\text{sistema escalonat: } \left. \begin{array}{l} 5x + 5y + z = 12 \\ y + z = 2 \end{array} \right\}$$

Ara és fàcil veure que té un conjunt infinit de solucions compost per les ternes de la forma: $(z, 2 - z, z)$; $z \in \mathbb{R}$. És a dir, donant diferents valors, qualssevol, a z (*incògnita lliure*) podem obtenir tantes solucions particulars com vulguem. Així, per exemple:

$z = 0,$ $(0, 2, 0).$	$z = 2,$ $(2, 0, 2)$	$z = -5,$ $(-5, 7, -5)$
$z = \frac{1}{2},$ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$z = \sqrt{3},$ $(\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$...

Recordem que si un sistema amb igual nombre d'equacions que d'incògnites és compatible indeterminat, ha d'ocórrer que una de les equacions es pugui escriure com a combinació lineal de les altres. En el cas estudiat es pot comprovar que la tercera equació es pot obtenir dividint entre 2 la suma de les dues primeres equacions.

És *incompatible* quan el sistema no té cap solució. Per exemple, si en el sistema anterior conservem les dues primeres equacions i modifiquem només el terme independent de la tercera, mantenim la dependència lineal dels primers membres de les equacions i no la dels segons, amb la qual cosa produïm una incompatibilitat:

$$\text{Ara el sistema és: } \left. \begin{array}{l} 5x + 6y + z = 12 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 4y + z = 10 \end{array} \right\} \text{ (hem canviat el 8 per un 10)}$$

Quan obtenim el sistema escalonat equivalent, ens trobem amb:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y + z = 12 \\ y + z = 3 \\ 0 = 1 \end{array} \right\}$$

I fem el següent raonament: si existeixen tres nombres que verifiquen les tres equacions del sistema inicial, també es compliran les igualtats que apareixen en el sistema escalonat, ja que aquest s'ha deduït lògicament d'aquell. Però això significa admetre que $0 = 1$, cosa que és absurda. Per tant el sistema inicial no té cap solució.

Problemes

Resol els següents problemes. En cada cas has de plantejar el sistema corresponent, classificar-lo i, si és compatible, resoldre'l:

1) Per dues copes de gelat, una orxata i un batut ens cobraren 4'80 €. L'endemà, a la mateixa gelateria ens cobraren 8'40 € per tres copes de gelat, dues orxates i dos batuts. Un tercer dia, per tres copes de gelat, una orxata i un batut, haguérem de pagar 6 €. Digues tot el que siga possible sobre els preus. Què cobraran per una consumició consistent en una copa de gelat, dues orxates i dos batuts?

2) Tornarem un quart dia a la mateixa gelateria i prenguérem 3 copes de gelat, una orxata i dos batuts. El compte fou de 7'50 €. Resol novament el problema.

3) Tres amics han comprat arbres fruiters. El primer ha comprat 10 pomes, 5 cirerers i 1 magraner. El segon, 6 pomes, 3 cirerers i 1 magraner. El tercer, 8 pomes, 4 cirerers i 2 magraners. El primer ha pagat 30 €, el segon 20 € i el tercer 40 €. Què cobraran per la compra de 5 pomes i 1 magraner?

Teorema de Rouché

Un sistema és compatible si el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és igual al rang de la matriu ampliada amb la columna dels termes independents.

Dins el teorema de Rouché podem tenir els següents tipus de sistemes:

- **S.C.D.** $rgM = rgM^* = n^{\circ}$ incògnites
- **S.C.I.** $rgM = rgM^* < n^{\circ}$ incògnites
- **S.I.** $rgM \neq rgM^*$

Exemple: Estudia la compatibilitat i el nombre de solucions del següent sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rang $M=2$, ja que la columna C_3 és igual a C_1 i les dues primeres columnes són proporcionals.

Rang $M^*=3$, ja que $\det(C_1, C_2, B) \neq 0$

Per tant es tracta d'un sistema incompatible (S.I.), ja que $rgM \neq rgM^*$

Mètode de Gauss

Sistema de dues equacions

Ens centrarem en el mètode de reducció – substitució, i per aprendre'n ens fixarem en el següent exemple.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = 108 \end{cases}$$

Multipliquem la 1a equació per 2, deixem la segona com estava i sumem.

$$\begin{array}{r} 6x - 4y = 12 \\ 9x + 4y = 108 \\ \hline 15x = 120 \end{array}$$

D'on podem concloure que: $x = 8$. Ara només cal substituir x a l'equació principal per extreure el valor de y .

$$72 + 4y = 108 \rightarrow y = 9$$

Solució: **$x=8, y=9$**

Sistema de tres equacions

Els sistema de tres equacions de Gauss consisteix a fer zeros a la matriu per tal de trobar les incògnites. Fixem-nos en el següent exemple:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} F_2' = F_1 - F_2 \\ F_3' = F_1 + F_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_3'' = F_2 - F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'aquesta última matriu podem extreure que $z = 1$. A partir d'aquesta incògnita desvelada podem saber les altres dues:

$$2y - 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow y = 1 \quad x + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 1 \quad \text{S.C.D.}$$

Solució **(1,1,1)**

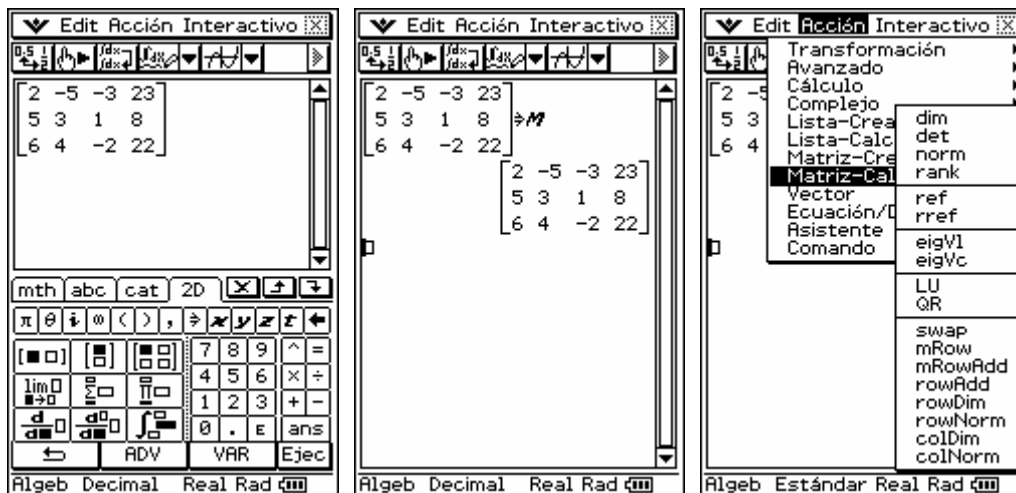
Mètode de Gauss amb calculadora gràfica

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y - 3z = 23 \\ 5x + 3y + z = 8 \\ 6x + 4y - 2z = 22 \end{array} \right\}, \text{ comencem per introduir la}$$

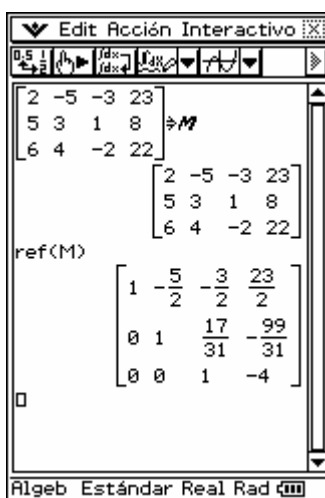
matriu ampliada.

Per facilitar la seua manipulació posterior emmagatzemem aquesta matriu a la variable M.

Triem Acció \Matriz-Calculat\ref (escalona la matriu) :



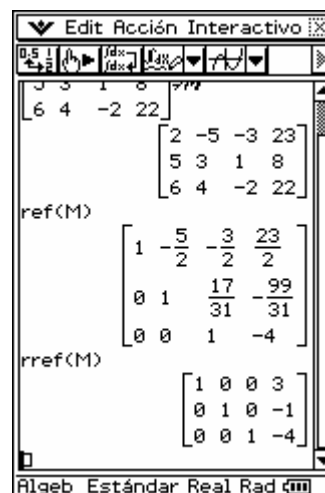
Indiquem que la matriu està a la variable M i ho executem:



La matriu que ens dóna la calculadora és equivalent al sistema:

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z &= \frac{23}{2} \\ y + \frac{17}{31}z &= -\frac{99}{31} \\ z &= -4 \end{aligned} \right\} \text{ i ara és fàcil calcular la solució: } (3, -1, -4)$$

També podem fer servir la matriu escalonada reduïda (rref), que sols ens deixa una diagonal i l'última columna amb les solucions:



Mètode de Cramer

Un sistema d'equacions lineals és un sistema de Cramer si compleix:

- Té n equacions i n incògnites.
- El determinant de la matriu de coeficients del sistema és diferent a zero.
- És un Sistema Compatible (S.C.)

Per tal de trobar les incògnites hem de seguir els passos que es poden apreciar a l'exemple següent:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{4} = 3$$

Hom pot observar que el denominador és el determinant de la matriu del sistema i el numerador és el determinant de la matriu que resulta de substituir en aquesta, la columna corresponent a cada incògnita per la dels termes independents.

Resolució de sistemes per la matriu inversa

Si una matriu A és regular, hi ha d'haver alguna manera de trobar-ne la seva inversa. La fórmula per esbrinar-la és la següent:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Comprovem-ho amb el següent exercici resolt:

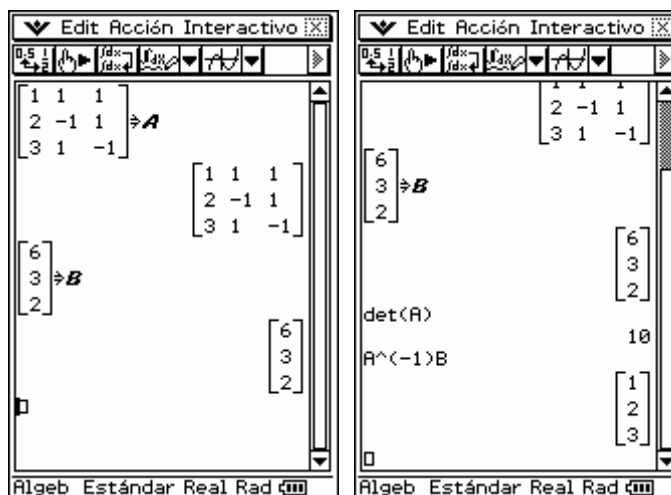
$$\left. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \right\} \rightarrow \text{que en forma matricial és: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

com que $|A| \neq 0$, existeix A^{-1} i:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & -2/5 & 1/10 \\ 1/2 & 1/5 & -3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $x = 1, y = 2, z = 3$

Amb la calculadora gràfica:



Problemes PAU

2000

J-A Problema 4. Per un gelat, dues orxates i quatre batuts ens cobraren en una gelateria 1.700 ptes. un dia. Un altre dia per quatre gelats i quatre orxates ens cobraren 2.200 ptes. Un tercer dia haguérem de pagar 1.300 ptes. per una orxata i quatre batuts. Raoneu si hi ha o no motius per a pensar que algun dels dies ens presentaren una factura incorrecta.

J-B Problema 4. El senyor Gómez deixa als seus fills en herència la seua fortuna, amb les següents condicions:

- El gran rebrà la mitjana aritmètica del que reben els altres dos més 30.000 euros.
- Al mitjà li deixa la mitjana aritmètica del que reben els altres dos.
- El menut rebrà la mitjana aritmètica del que perceben els altres dos menys 30.000 euros.

Expliqueu, raonadament, si amb aquesta informació és possible esbrinar quant ha heretat cada un dels tres fills.

S-A Problema 4. Entre els partits polítics A i B obtingueren el 90% dels vots en unes eleccions.

Calcular el percentatge de vots que va obtenir cada partit, sabent que en les eleccions següents: el partit polític A va sofrir un descens d'un 10% en el nombre de votants respecte a les anteriors eleccions, el partit polític B va tindre un 10% d'augment en el nombre de votants respecte a les anteriors eleccions, i que entre els dos partits van tornar a obtenir el 90% del total dels vots.

S-B Problema 1. Troba totes les solucions del sistema : $x + y + z = 1$
 $y + z = 2$
 $-x + y + z = 3$

2001

J-A Problema 1. Calculeu els determinants $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ i

$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$. Apliqueu els resultats obtinguts per a resoldre per la regla de

Cramer el sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

J-B Problema 2. Hem invertit 4.000.000 de pessetes en accions de les empreses A, B i C. Després d'un any, l'empresa A va repartir un benefici del 6%, la B del 8% i la C del 10%. En total rebem 324.826 pessetes.

- Deduïu raonadament si es pot esbrinar o no què invertim en cada empresa.
- Deduïu raonadament què invertim en cada empresa sabent que a l'empresa C invertim el doble que a l'empresa A.

S-A Problema 1. En una reunió hi ha 40 persones. La suma del nombre d'homes i de dones triplica el nombre de xiquets. El nombre de dones excedeix en 6 la suma del nombre d'homes més el nombre de xiquets. Esbrineu raonadament quants homes, dones i xiquets hi ha.

S-B Problema 2. Un estudiant va obtenir un 6 en un examen de matemàtiques que constava de tres preguntes. En la primera pregunta va obtenir una qualificació igual al doble de la qualificació que va obtenir en la segona pregunta i en la tercera pregunta va obtenir una qualificació igual a la suma de les qualificacions de les altres dues preguntes. Esbrineu raonadament la qualificació de cada pregunta.

2002

J-A Problema 2. Un tren transporta 500 viatgers i la recaptació de l'import dels bitllets d'estos ascendeix a 2.115 €. Calculeu de forma raonada quants viatgers han pagat l'import total del bitllet, que val 9 €, quants han pagat el 20% del bitllet i quants el 50%, sabent que el nombre de viatgers que han pagat el 20% és el doble del nombre de viatgers que han pagat el bitllet sencer.

2003

J-B Problema 3. Cinc amics solen prendre café junts. El primer dia van prendre 2 cafés, 2 tallats i un café amb llet i van haver de pagar 3 €. L'endemà van prendre un café, un tallat i tres cafés amb llet, per la qual cosa van pagar 3,25 €. El tercer dia només es van reunir quatre amics i van prendre un café, dos tallats i un café amb llet, el compte va ascendir a 2,45 €. Calculeu de forma raonada el preu del café, del tallat i del café amb llet.

S-B Problema 1. El preu del bitllet d'una línia d'autobús s'obté sumant dues quantitats, una fixa i una altra proporcional als quilòmetres recorreguts. Per un bitllet entre les poblacions A i B s'han pagat 20 € i per un bitllet entre les poblacions A i C s'han pagat 32 €. Si la distància de A a C és el doble de la distància de A a B, calculeu de forma raonada quant s'haurà de pagar per un bitllet a una població que dista de A la meitat que B.

2004

J-B Problema 1. Joan decideix invertir una quantitat de 12.000 € en borsa, comprant accions de tres empreses diferents, A, B i C. Inverteix en A el doble que en B i C juntes. Transcorregut un any, les accions de l'empresa A s'han revaloritzat un 4%, les de B un 5% i les de C han perdut un 2% del seu valor original. Com a resultat de tot açò, Joan ha obtingut un benefici de 432,5 €. Determineu quant va invertir Joan en cadascuna de les empreses.

S-B Problema 1. Dos fills decideixen fer un regal de 100 € a sa mare. Com que no tenen prou diner, compten amb l'ajuda de son pare i decideixen pagar el regal de la següent forma: el pare paga el triple del que paguen els dos fills junts i, per cada 2 € que paga el germà menor, el major paga 3 €. Quants diners ha de posar cadascú?

2005

J-A Problema 1. Helena, Pere i Joan col·loquen diàriament fulls de propaganda sobre els parabrises dels cotxes aparcats al carrer. Pere reparteix sempre el 20% del total de la propaganda, Joan reparteix 100 fulls més que Helena i entre Pere i Helena col·loquen 850 fulls als parabrises. Plantegeu un sistema d'equacions que permeta esbrinar quants fulls reparteixen, respectivament, Helena, Pere i Joan i calculeu aquests valors.

J-B Problema 1. Sigui $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriu dels seus termes

independents. Es demana:

- Escriviu les tres equacions que formen el sistema.
- Obteniu totes les solucions del sistema.

S-A Problema 1. Dos germans decideixen invertir 10000 € cadascun en distints productes financers. El major va invertir una quantitat A en un producte que ha proporcionat un benefici del 6%, una quantitat B en un altre que ha donat una rendibilitat del 5% i la resta en un termini fix al 2% d'interès. El germà menor va invertir eixes mateixes quantitats en altres productes que li han proporcionat, respectivament, uns beneficis del 4, 3 i 7 %. Determineu les quantitats A, B i C invertides si els guanys del germà major han segut 415 € i els del xicotet 460 €.

2006

J-A Problema 1. Tres constructores inverteixen en la compra de terrenys de la forma següent: la primera va invertir mig milió d'euros en terreny urbà, 250.000 euros en terreny industrial i 250.000 euros en terreny rústic. La segona, va invertir 125.000, 250.000 i 125.000 euros en terreny urbà, industrial i rústic, respectivament, i la tercera, 100.000, 100.000 i 200.000 euros en aquests mateixos tipus de terreny, respectivament. Transcorregut un any, venen tots els terrenys. La rendibilitat que obté la primera constructora és del 13,75%, la de la segona de l'11,25% i, finalment, la de la tercera és del 10%. Determina la rendibilitat de cada un dels tipus de terreny per separat.

J-B Problema 1. Resol el següent sistema d'equacions lineals utilitzant el mètode de Cramer:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -6 \\ x & & + z = 5 \\ 2x - y & & = 11 \end{array} \right\}$$

S-B Problema 1. En el primer curs de batxillerat d'un institut hi ha matriculats un total de 65 alumnes dividits en tres grups: A, B i C. Dinen en el centre 42 d'ells, que corresponen a la meitat dels del grup A, les quatre cinques parts dels del B i les dues terceres parts dels del C. A una eixida fora del centre van acudir les tres quartes parts dels alumnes del grup A, tots els del B i les dues terceres parts dels del C, sumant en total 52 estudiants. Quants alumnes hi ha en cada grup?

2007

J-B Problema 1. Els tres models existents d'una marca d'automòbils costen 12.000, 15.000 i 22.000 euros, respectivament. Un concessionari ha ingressat 1.265.000 euros per la venda d'automòbils d'aquesta marca. Quants cotxes ha venut de cadascun dels models si del més barat es van vendre tants com dels altres dos junts i del més car la tercera part dels cotxes que costen 15.000 euros?

3 La programació lineal

En els segles XVII i XVIII, grans matemàtics, com Newton, Leibnitz, Bernoulli i, sobretot, Lagrange, que tant havien contribuït al desenrotllament del càlcul infinitesimal, es van ocupar del problema d'obtenir màxims i mínims condicionats de determinades funcions.

Posteriorment, el matemàtic francès Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) va ser el primer a intuir, encara que de forma imprecisa, els mètodes del que actualment anomenem programació lineal i la potencialitat que d'ells es deriva.

Si exceptuem el matemàtic Gaspar Monge (1746-1818), qui en 1776 es va interessar per problemes d'aquest gènere, hem de remuntar-nos a l'any 1939 per a trobar nous estudis relacionats amb els mètodes de l'actual programació lineal. En eixe any, el matemàtic rus Leonid Vitalevich Kantorovitch publica una extensa monografia titulada Mètodes matemàtics d'organització i planificació de la producció en què per primera vegada es fa correspondre a una extensa gamma de problemes una teoria matemàtica precisa i ben definida, anomenada avui dia programació lineal.

En 1941-1942 es formula per primera vegada el problema de transport, estudiat independentment per Koopmans i per Kantorovitch, raó per la qual se sol conèixer amb el nom de problema de Koopmans-Kantorovitch.

Tres anys més tard, G. Stigler planteja un altre problema particular conegut amb el nom de règim alimentari optimal. En els anys posteriors a la Segona Guerra Mundial, als Estats Units es va assumir que d'eficax coordinació de totes les energies i recursos de la nació era un problema de tal complexitat, que la seua resolució i simplificació passava necessàriament pels models d'optimitació que resol la programació lineal.

Paral·lelament als fets descrits es desenvolupen les tècniques de computació i els ordinadors, instruments que farien possible la resolució i simplificació dels problemes que s'estaven gestant. En 1947, G. B. Dantzig formula, en termes matemàtics molt precisos, l'enunciat estàndard a què cap reduir tot problema de programació lineal. Dantzig, junt amb una sèrie d'investigadors de l'United States Departament of Air Force, formarien el grup que es va denominar SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).

Els fonaments matemàtics de la programació lineal es deuen al matemàtic nord-americà d'origen hongarès John (Janos) Von Neumann (1903-1957), qui en 1928 va publicar el seu famós treball Teoria de jocs. En 1947 conjectura l'equivalència dels problemes de programació lineal i la teoria de matrius desenvolupada en els seus treballs. La influència d'aquest respectat matemàtic, deixeble de David Hilbert en Gotinga i, des de 1930, catedràtic de la Universitat de Princeton dels Estats Units, fa que altres investigadors s'interessaren gradualment pel desenvolupament rigorós d'aquesta disciplina.

Desigualtats.

Atés que el conjunt dels nombres reals \mathbb{R} és totalment ordenat, donats dos nombres reals a i b , sempre és certa alguna de les tres relacions següents:

$$a < b \text{ o } a > b \text{ o } a = b$$

Les dues primeres s'anomenen desigualtats.

Entre les desigualtats numèriques es compleixen les tres transformacions d'equivalència següents:

a. Si als dos membres d'una desigualtat se'ls suma un mateix nombre, la desigualtat es conserva en el mateix sentit, és a dir:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

b. Si els dos membres d'una desigualtat es multipliquen o divideixen per un mateix nombre positiu, la desigualtat conserva el sentit, és a dir:

$$\text{Si } c \in \mathbb{R}^+ \quad a < b \Rightarrow ac < bc \text{ i } a > b \Rightarrow ac > bc$$

c. Si els dos membres d'una desigualtat es multipliquen o divideixen per un mateix nombre negatiu, la desigualtat canvia de sentit, és a dir:

$$\text{Si } c \in \mathbb{R}^- \quad a < b \Rightarrow ac > bc \quad \text{i} \quad a > b \Rightarrow ac < bc$$

d. Donats quatre nombres reals a , b , c i d qualssevol, es compleix la compatibilitat de l'ordenació amb la suma, és a dir:

$$a < b \text{ i } c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

e. Donats dos nombres reals, si el primer és menor que el segon, l'invers del primer és major que el del segon i viceversa, és a dir:

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

f. Si un nombre real és menor que un altre, amb els oposats d'aquests dos la desigualtat canvia de sentit, és a dir:

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

Inequacions en la calculadora gràfica

A vegades, els enunciats que donen lloc a una expressió algebraica no diuen “és igual”, sinó “és major” o “és menor”, per exemple:

Sabem que cada costat d'un triangle és menor que la suma dels altres dos i major que la seua diferència. Siguen $x=2$ i $y=4$ dos costats d'un triangle, quant mesura l'altre?

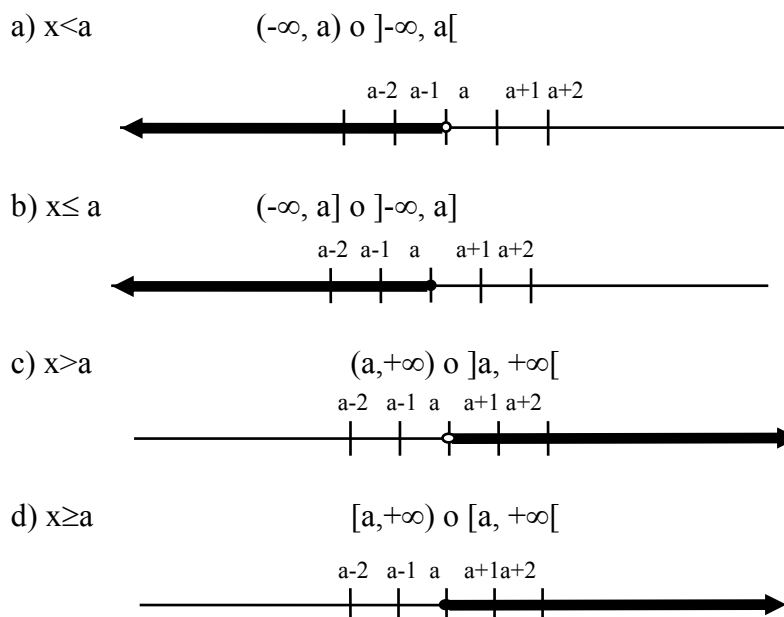
Si anomenem z a l'altre costat, llavors $z < 2+4$ y $z > 4-2$.

Si tractem d'escriure una expressió algebraica que represente la situació, veiem que no podem posar el signe = entre les quantitats.

Si en una equació substituïm el signe = per $<$, $>$, \leq o \geq obtenim una *inequació*.

Inequacions lineals amb una variable

Al resoldre una inequació lineal amb una variable utilitzant les propietats de les desigualtats arribarem a una de les situacions següents:



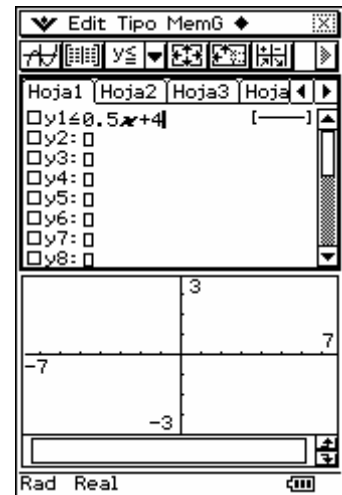
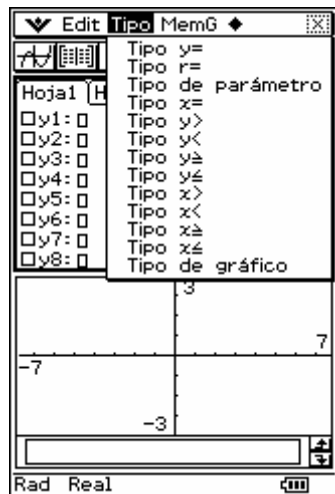
Inequacions de primer grau amb dos incògnites. Regions del pla

Si volem saber quina és la regió del pla que verifica que $y \leq 0.5x + 4$ haurem de buscar el conjunt de punts del pla (x,y) que verifiquen la desigualtat, i per tant la recta dividirà el pla en dos trossos, i un d'ells és el que ens interessa. Haurem de fer el següent:

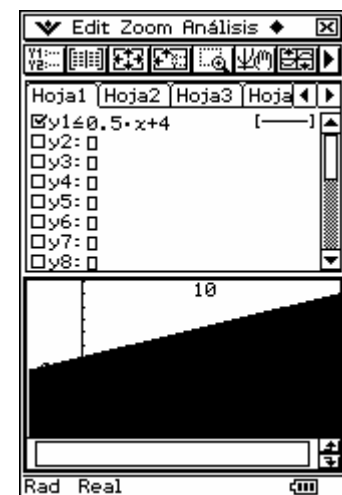
En el menú de Gràfics :



Seleccionem en **Tipus** y ≤ i introduïm la inequació: $y \leq 0.5x + 4$



Ajustem la grandària de la finestra i dibuixem



Sistemes d'inequacions lineals amb dos incògnites

Un sistema d'inequacions de primer grau amb dos incògnites està format per dos o més inequacions amb dos incògnites que han de verificar-se simultàniament.

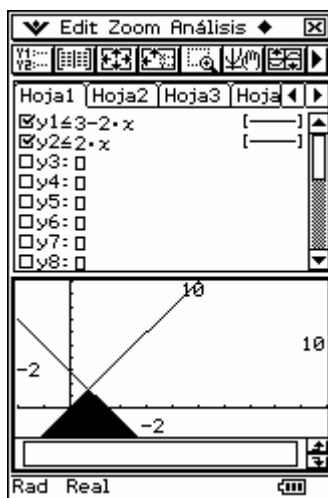
Tenint en compte que la solució d'una inequació lineal amb dos incògnites és un semiplà, la solució d'un sistema d'inequacions lineals serà la regió del pla que conté tots els punts les coordenades dels quals són solució de totes i cada una de les inequacions del sistema. Esta regió s'obté a partir de la intersecció dels semiplans de cada una de les inequacions que formen el sistema.

Vegem alguns exemples:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 6 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \quad \text{si transformem el sistema} \quad \begin{cases} y \leq 3 - 2x \\ y \leq 2x \end{cases}$$

obtenim:

La solució del sistema està formada pels punts del pla que són solució de les dos inequacions al mateix temps. Esta l'obtenim per superposició dels dos semiplans solució de cada una de les inequacions del sistema.



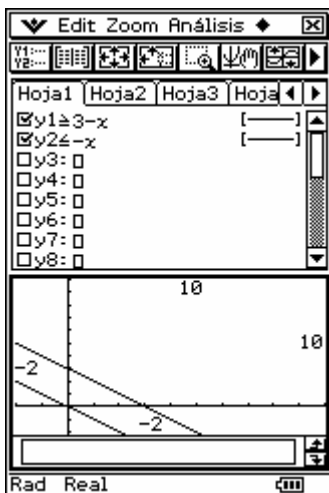
Com s'observa en aquest cas es tracta d'una **regió poligonal no fitada**.

Vegem un altre cas:

$$\begin{cases} 2x + 2y \geq 6 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \quad \text{si transformem el sistema} \quad \begin{cases} y \geq 3 - x \\ y \leq -x \end{cases}$$

obtenim:

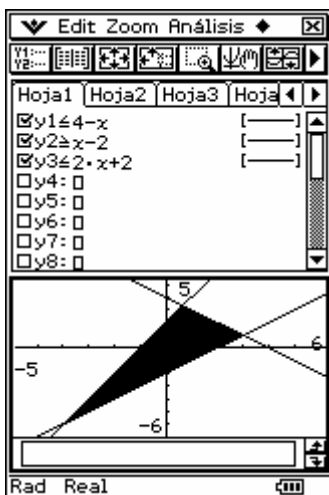
i si procedim com en el cas anterior observem que no té solució.



Finalment considerem el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 2 \\ 2x - y \geq 2 \end{cases} \quad \text{transformant-ho i procedint com} \quad \begin{cases} y \leq 4 - x \\ y \geq x - 2 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$$

en les ocasions anteriors obtenim:



On la solució és una **regió poligonal tancada**.

Punts òptims de funcions en conjunts convexos.

Es defineix una funció lineal amb dues variables com una expressió de la forma $f(x, y) = ax + by$. Hom a d'observar que per a cada valor de "c", el lloc geomètric dels punts les coordenades del qual (x, y) verifiquen $f(x, y) = c$ és la recta d'equació $ax+by=c$. Al variar "c", s'obtenen rectes paral·leles tals que totes tenen el mateix pendent $-a/b$ i tallen a l'eix Y en el punt $(0, c/b)$. Si els valors de x i y no estan tancats, tampoc ho estarà $f(x, y)$, en canvi, si estan restringits a un cert conjunt C, la funció no podrà prendre qualsevol valor. Es pot llavors parlar de valor màxim o mínim (valors òptims) de $f(x, y)$ en C. Es compleix el següent teorema: "Si una funció lineal $f(x, y)=ax+by$ té màxim o mínim en un conjunt C convex, pren aquest valor òptim en un punt extrem". En efecte, si el valor c fóra òptim i corresponguera a

un punt (x, y) interior al conjunt convex C , sempre es podrien trobar dues rectes paral·leles a $ax+by+c=0$, en les quals $f(x, y)$ prendria valors majors o menors que c i no podria ser c màxim o mínim. Per tant aquests valors només poden presentar-se en els punts extrems. Usant aquest teorema, per a trobar els punts òptims de $f(x, y)$ en el conjunt convex C podem procedir de dues formes:

1. Estudiar els valors de la funció en els vèrtexs (si el seu nombre és reduït) i decidir en quin d'ells hi ha màxim o mínim. Tinguem en compte que si la funció pren el mateix valor en dos vèrtexs consecutius, també pren eixe valor en tots els punts del segment que uneix eixos dos vèrtexs.
2. Representar la funció en una gràfica per a un valor qualsevol de c (se sol prendre $c=0$) i obtenir, per simple inspecció, desplaçant la recta dibuixada paral·lelament a si mateixa el punt òptim. Aquest procediment, per ser gràfic és més imprecís llevat que realitzem el dibuix amb molta precisió. Nosaltres utilitzarem el mètode a) llevat que el nombre de vèrtexs siga molt elevat.

Exemples

El dilema (P.A.U. Matemàtiques II 1997 Universitat de València)

Marc M.M. ha estat treballant tot l'estiu per a poder pagar-se la matrícula del curs següent.

El seu problema ara és decidir el nombre de crèdits teòrics i pràctics en què es matricularà, ja que han de complir-se els requisits següents:

- 1- Només disposa de 84.000 PTA. El preu d'un crèdit teòric (CT) és d'1.000 PTA, i el d'un crèdit pràctic (CP) és de 2.000 PTA.
- 2- Ha de triar un mínim de 20 CT i com a màxim 56 CT, i no vol matricular-se en més de 70 crèdits en total.
- 3- La normativa de la seua Universitat exigeix que el nombre de CP no supere el 20% del total de crèdits triats.

Si el seu objectiu és cursar el nombre més gran possible de crèdits, de quants crèdits teòrics i pràctics haurà de matricular-se?

Solució

Siguen x els CT que tria e i els CP, llavors

$$1.000x+2.000y \leq 84.000$$

$$x + y \leq 70$$

$$y \leq (20/100)(x+y)$$

$$x \geq 20$$

$$x \leq 56$$

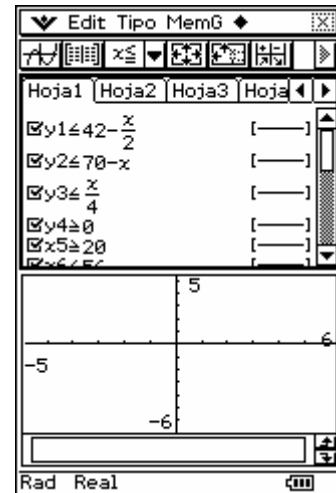
$$y \geq 0$$

i l'objectiu és maximitzar $x+y$
 Amb les convenientes manipulacions quedaria:
 Maximitzar $x + y$

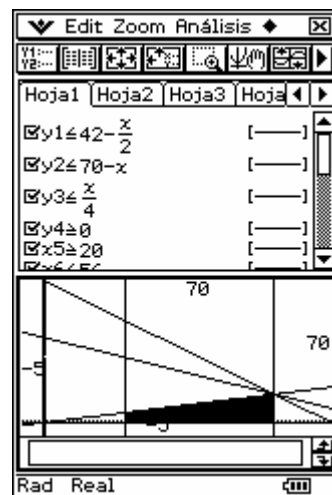
Subjecte a :

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 84 \quad (y \leq 42 - x/2) \\ x+y &\leq 70 \quad (y \leq 70 - x) \\ x &\geq 4y \quad (y \leq x/4) \\ x &\geq 20, x \leq 56, y \geq 0 \end{aligned}$$

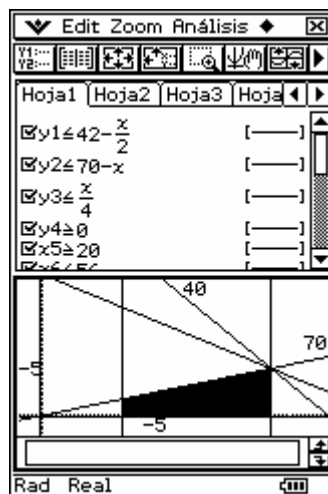
Introduïm les funcions en l'editor de funcions:



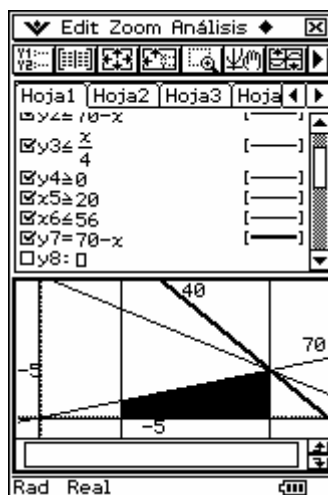
Restringim la grandària de la finestra en a $-5 \leq x \leq 70$ y $-5 \leq y \leq 70$:



I observem que amb $-5 \leq y \leq 40$ tenim prou



Si tracem una paral·lela a la funció objectiu ($y=-x$)($y=70-x$): observem que la solució és la intersecció de les tres rectes, $x=56$ e $y=14$, amb un valor de la funció objectiu ($x+y$) de 70.



Una altra opció és fixar-nos en la regió factible, és a dir, la que conté les possibles solucions. En el gràfic es correspon amb la intersecció dels semiplans. Esta regió és un polígon convex, els vèrtexs del qual són $(22,0)$, $(56,0)$, $(56,14)$ i $(22,22/4)$. Com la funció és contínua i el conjunt en què cal maximitzar-la un convex tancat, el màxim l'aconseguirà en un dels vèrtexs o en una de les seues arestes (delimitada per dos dels seus vèrtexs).

Si calculem el valor de la funció objectiu per a cada un dels punts:

Punt	$x+y$
$(22,0)$	22
$(56,0)$	56
$(56,14)$	70
$(22,22/4)$	27.5

Observem que el màxim s'aconsegueix per a $x=56$ i $y=14$ amb un valor de la funció objectiu de 70.

El problema de programació lineal amb dues variables

Un problema de programació lineal amb dues variables té per finalitat optimar (maximitzar o minimitzar) una funció lineal: $f(x,y) = ax + by$ anomenada funció objectiu, subjecta a una sèrie de restriccions presentades en forma de sistema d'inequacions amb dues incògnites

$$\text{de la forma: } \left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{array} \right\}$$

Cada desigualtat del sistema de restriccions determina un semiplà. El conjunt intersecció de tots eixos semiplans rep el nom de zona de solucions factibles. El conjunt dels vèrtexs del recinte es denomina conjunt de solucions factibles bàsiques i el vèrtex on es presenta la solució òptima s'anomena solució màxima (o mínima segons el cas). El valor que pren la funció objectiu en el vèrtex de solució òptima s'anomena valor del programa lineal.

El procediment a seguir per a resoldre un problema de programació lineal en dues variables serà, doncs:

1. Elegir les incògnites.
2. Escriure la funció objectiu en funció de les dades del problema.
3. Escriure les restriccions en forma de sistema d'inequacions.
4. Esbrinar el conjunt de solucions factibles representant gràficament les restriccions.
5. Calcular les coordenades dels vèrtexs del recinte de solucions factibles (si en són pocs).
6. Calcular el valor de la funció objectiu en cada un dels vèrtexs per a veure en quin d'ells presenta el valor màxim o mínim segons ens demane el problema (cal tenir en compte ací la possible no existència de solució si el recinte no és tancat).

Problemes PAU

2000

J-A PROBLEMA 2. Una factoria produeix cotxes dels models A i B. El benefici per la venda d'un cotxe del model A és 450 euros, i la venda d'un del model B reporta un benefici de 600 euros. La capacitat de la factoria impedeix produir més de 400 cotxes per dia del model A i més de 300 cotxes per dia del model B. A més, no és possible produir diàriament més de 500 cotxes entre ambdós models.

Es ven tota la producció que es fa i es vol saber, raonadament, quants cotxes interessa fabricar de cada model per a obtenir el màxim benefici.

J-B PROBLEMA 2. Un venedor de llibres usats té 180 llibres de l'editorial A i 160 de l'editorial B, amb els quals decideix de fer dos tipus de lots, el lot econòmic amb tres llibres de l'editorial A i un de l'editorial B, que vendrà a 800 PTA., i el lot selecte amb un llibre de l'editorial A i dos de l'editorial B, que vendrà a 1.000 PTA. Deduïu raonadament quants lots ha de fer de cada tipus per a maximitzar els seus ingressos en vendre tots els lots.

S-A PROBLEMA 1 Troba els màxims i mínims de la funció $f(x, y) = 2x + 3y - 7$ en la regió limitada pels segments que uneixen: el punt $(0, 0)$ i el $(0, 6)$; el punt $(0, 6)$ i el $(4, 4)$; el punt $(4, 4)$ i el $(6, 0)$; i el punt $(6, 0)$ i el punt $(0, 0)$.

S-B PROBLEMA 2 He de menjar al menys 100 grams de l'aliment A. D'altre aliment B he de menjar més grams que de l'aliment A. Entre els aliments A i B no he de sobrepassar els 300 grams. El producte A té 50 calories/gram. Quants grams he de menjar d'A i quants de B per a obtenir el màxim de calories?

2001

J-A PROBLEMA 2. Una fàbrica produeix bombetes normals a 900 pessetes cadascuna i focus halògens a 1.200 pessetes cadascun. La capacitat màxima diària de fabricació n'és de 1.000, entre bombetes normals i focus halògens, si bé no es poden fabricar més de 800 bombetes normals ni més de 600 focus halògens.

Se sap que la fàbrica ven tota la producció. Esbrineu raonadament quantes bombetes i quants focus ha de produir per a obtenir la màxima facturació possible i quina seria aquesta.

J-B PROBLEMA 3. Una indústria fabrica bolígrafs que ven a 400 pessetes cadascun i plomes estilogràfiques que ven a 1.200 pessetes cadascuna. Les màquines limiten la producció de manera que cada dia no es poden produir més de 200 bolígrafs ni més de 150 plomes estilogràfiques, i el total de la producció (bolígrafs més plomes) no pot ultrapassar les 250 unitats. La indústria ven sempre tota la producció. Deduïu raonadament quants bolígrafs i plomes estilogràfiques ha de produir al dia per a maximitzar el benefici i quin seria aquest.

S-A PROBLEMA 3. L'INSERSO ha d'organitzar un viatge per a 800 persones amb certa empresa que disposa de 16 autobusos de 40 places cadascun i 20 autobusos de 50 places cadascun. El lloguer d'un autobús xicotet costa 3.000 pessetes i el lloguer d'un autobús gran costa 4.000 pessetes

Esbrineu raonadament quants autobusos de cada classe s'han de contractar per a minimitzar el cost i quin seria el cost mínim, sabent que l'empresa només disposa de 18 conductors

S-B PROBLEMA 1. La funció $f(x,y) = 2x + 3y$ està definida en el polígon de vèrtexs $(0,0)$, $(6,0)$, $(6,8)$, $(4,12)$ i $(0,15)$. Determineu de forma raonada tots els punts en què la funció f assoleix un màxim. Justifiqueu de forma raonada si aquest màxim s'assoleix en un sol punt o no. En quin punt o punts s'assoleix el màxim? Quin és el valor del màxim?

2002

J-A PROBLEMA 1. Es considera la regió factible donada pel conjunt de restriccions següents:

$$x + y \leq 5$$

$$x + 3y \geq 9$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Representeu la regió factible que determina el sistema d'inequacions anterior i calculeu de forma raonada el punt o els punts de la regió factible en què les funcions següents assoleixen el seu màxim i el seu mínim: a) $f(x, y) = 2x + 3y$, b) $f(x, y) = y - x$.

J-B PROBLEMA 1. Es disposa de 120 refrescs de cola amb cafeïna i de 180 refrescs de cola sense cafeïna. Els refrescs es venen en paquets de dos tipus. Els paquets de tipus A contenen tres refrescs amb cafeïna i tres sense cafeïna, i els de tipus B en contenen dos amb cafeïna i quatre sense cafeïna. El venedor guanya 6 € per cada paquet que venga de tipus A i 5 € per cada paquet que venga de tipus B. Calculeu de forma raonada quants paquets de cada tipus ha de vendre per tal de maximitzar el benefici i calculeu aquest benefici.

S-A PROBLEMA 1. En un terreny es volen cultivar dos tipus d'oliveres: A i B. No es poden cultivar més de 8 ha amb oliveres de tipus A ni més de 10 ha amb oliveres del tipus B. Cada hectàrea d'oliveres de tipus A necessita 4 m^3 d'aigua anuals i cadascuna de tipus B, 3 m^3 . Es disposa anualment de 44 m^3 d'aigua. Cada hectàrea de tipus A requereix una inversió de 500 € i cada hectàrea de tipus B, 225 €. Es disposa de 4.500 € per a fer la dita inversió. Si cada hectàrea d'oliverar de tipus A i B produeixen, respectivament, 500 i 300 litres anuals d'oli,

- Obteniu raonadament les hectàrees de cada tipus d'olivera que s'han de plantar per tal de maximitzar la producció d'oli
- Obteniu la producció màxima d'oli.

S-B PROBLEMA 1. Una empresa fabrica dos tipus d'aparells A i B que necessiten passar pels tallers X i Y. En cadascun dels tallers es treballa 100 hores a la setmana. Cada aparell A requereix 3 hores del taller X i 1 hora del taller Y, i cada aparell B necessita 1 i 2 hores, respectivament. Cada aparell A es ven a 100 € i cada aparell B es ven a 150 €.

- Obteniu raonadament quants aparells de cada tipus han de produir-se perquè l'ingrés per vendes siga màxim
- Quin és l'ingrés màxim?

2003

J-A PROBLEMA 2. Una companyia fabrica i ven dos models de llums A i B. Per a la seua fabricació es necessita un treball manual de 20 minuts per al model A i de 30 minuts per al model B; i un treball de màquina de 20 minuts per al model A i de 10 minuts per al model B. Es disposa per al treball manual de 6.000 minuts al mes i per al de màquina de 4.800 minuts al mes. Sabent que el benefici per unitat és de 15 € per al model A i de 10 € per al model B, planifiqueu la producció mensual per obtindre el màxim benefici i calculeu-ne aquest.

J-B PROBLEMA 2. He de prendre almenys 60 mg de vitamina A i almenys 90 mg de vitamina B cada dia. En la farmàcia puc adquirir dues pastilles de marques diferents X i Y. Cada pastilla de la marca X conté 10 mg de vitamina A i 15 mg de vitamina B, i cada pastilla de la marca Y conté 10 mg de cada vitamina. A més, no és convenient prendre més de 8 pastilles diàries. Sabent que el preu de cada pastilla de la marca X és de 50 cèntims d'euro i que cada pastilla de marca Y costa 30 cèntims d'euro, calculeu de forma raonada:

- Quantes pastilles diàries de cada marca he de prendre perquè el cost siga mínim, i
- Quin és el cost mínim.

S-A PROBLEMA 2. Una empresa disposa d'un màxim de 16.000 unitats d'un producte que pot vendre en unitats soltes o en lots de quatre unitats. Per empaquetar un lot de quatre unitats es necessita el triple de material que per empaquetar una unitat solta. Si es disposa de material per empaquetar 15.000 unitats soltes, i si el benefici que s'obté per la venda de cada unitat solta és de 2 € i de cada lot de quatre unitats és de 7 €, calculeu de forma raonada el nombre d'unitats soltes i de lots de quatre unitats que s'ha de preparar per maximitzar el benefici i calculeu-ne aquest.

S-B PROBLEMA 2. Es pretén invertir en dos productes financers A i B. La inversió en B ha de ser almenys de 3.000 € i no es vol invertir en A més del doble que en B. Se suposa que A proporcionarà un benefici del 10% i B del 5%. Si es disposa de 12.000 €, calculeu de forma raonada quant s'ha d'invertir en cada producte per maximitzar el benefici i determineu-ne aquest.

2004

J-A PROBLEMA 2. Un banc disposa de 18 milions d'euros per oferir préstecs de risc alt i mitjà, amb rendiments del 14% i 7%, respectivament. Tot sabent que s'ha de dedicar almenys 4 milions d'euros a préstecs de risc mitjà i que els diners invertits en alt i mitjà risc ha d'estar com a màxim a raó de 4 a 5, determineu quant ha de dedicar-se a cadascun del tipus de préstec per maximitzar el benefici i calculeu aquest.

J-B PROBLEMA 2. Un tren de mercaderies pot arrossegar, com a màxim, 27 vagons. En cert viatge, transporta cotxes, i motocicletes. Per a cotxes ha de dedicar un mínim de 12 vagons i per a motocicletes no menys de la meitat dels vagons que dedica als cotxes. Si els ingressos de la companyia ferroviària són de 540 € per vagó de cotxes i 360 € per vagó de motocicletes, calculeu com s'han de distribuir els vagons perquè el benefici d'un transport de cotxes i motocicletes siga màxim i quant val aquest benefici.

S-A PROBLEMA 2. Un fabricant produeix en dos tallers tres models diferents d'arxivadors, el A, el B i el C. S'ha compromés a entregar 12 arxivadors del model A, 8 del B i 24 del C. Al fabricant li costa 720 € al dia el funcionament del primer taller i 960 € el del segon. El primer taller produeix diàriament 4 arxivadors del model A, 2 del B i 4 del C, mentre que el segon produeix 2, 2 i 12 arxivadors, respectivament. Quants dies ha de treballar cada taller per a, tot complint el contracte, aconseguir reduir al màxim els costos de funcionament? Quin és el valor de l'esmentat cost? Quedaria algun excedent d'algun producte als tallers? En cas afirmatiu, determineu-ne quant.

S- B PROBLEMA 2. Calculeu els punts de la regió definida per

$$x + y \geq 6$$

$$2x + y \leq 15$$

$$3 \leq x \leq 6$$

$$2 \leq y \leq 5$$

on la funció $z = 3x + 2y$ pren els valors màxim i mínim. Calculeu els esmentats valors.

2005

J-A PROBLEMA 2. Les necessitats vitamíniques diàries d'una persona són d'un mínim de 36 mg de vitamina A, 28 mg de vitamina C i 34 mg de vitamina D. Aquestes necessitats es cobreixen prenent pastilles de la marca *Energic* i de la marca *Vigor*. Cada pastilla de la marca *Energic* costa 0,03 € i proporciona 2 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C i 8 mg de vitamina D. Cada pastilla de la marca *Vigor* costa 0,04 € i proporciona 3 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C i 2 mg de vitamina D. Quantes pastilles de cada marca s'han de prendre diàriament si es desitja cobrir les necessitats vitamíniques bàsiques amb el menor cost possible? Determineu l'esmentat cost.

J-B PROBLEMA 2. Un venedor disposa de 350000 € per a invertir en dos tipus de microones. El que disposa de més accessoris té un cost de 150 € i reporta un benefici de 15 € per unitat venuda, mentre que l'altre model sols proporciona un benefici d'11 € per unitat venuda i té un cost de 100 €. Tot sabent que només es poden emmagatzemar 3000 microones i que no es vendran més de 2000 del model més car, determineu quants microones de cada classe es deuen comprar per a maximitzar el benefici i calculeu aquest.

S-A PROBLEMA 2. Representeu la regió factible donada pel sistema d'inequacions:

$$x + y \geq -1$$

$$x \leq 2$$

$$y \geq -1$$

$$x \geq 3y - 1/2$$

i trobeu els punts de la regió factible on la funció $f(x, y) = 2x + 3y$ assolix els valors màxim i mínim i obtingueu tals valors.

S-B PROBLEMA 2. Una empresa farmacèutica té en l'actualitat dues línies d'investigació, la de medicaments antiinflamatoris no esteroïdes i la de fàrmacs ansiolítics. Desitja invertir en la investigació com a màxim tres milions d'euros, amb la condició de dedicar almenys 1,5 milions d'euros als ansiolítics, amb els que espera obtenir un benefici del 10%. En canvi en la investigació sobre medicaments antiinflamatoris, encara que es calcula un benefici del 25% no ha d'invertir més d'un milió d'euros. Quina quantitat ha de dedicar a cada línia d'investigació per a maximitzar beneficis, si a més ha de dedicar als ansiolítics almenys el doble de diners que als antiinflamatoris? Quin benefici obtindrà d'aquesta manera l'empresa?

2006

J – B PROBLEMA 2. Una refineria de petroli adquireix dos tipus de cru, lleuger i pesat, a un preu de 70 i 65 euros per barril, respectivament. Amb cada barril de cru lleuger la refineria produeix 0,3 barrils de gasolina 95, 0,4 barrils de gasolina 98 i 0,2 barrils de gasoil. Així mateix, amb cada barril de cru pesat produeix 0,1, 0,2 i 0,5 barrils de cada un d'aquests tres productes, respectivament. La refineria ha de subministrar almenys 26.300 barrils de gasolina 95, 40.600 barrils de gasolina 98 i 29.500 barrils de gasoil. Determina quants barrils de cada tipus de cru ha de comprar la refineria per a cobrir les seues necessitats de producció amb un cost mínim i calcula aquest

S-A PROBLEMA 2. Una destil·leria produeix dos tipus de *whisky blend* mesclant només dues maltes destil·lades distintes, A i B. El primer té un 70% de malta A i es ven a 12 €/litre, mentre que el segon té un 50% de l'esmentada malta i es ven a 16 €/litre. La disponibilitat de les maltes A i B són 132 i 90 litres, respectivament. Quants litres de cadascun dels *whiskys* ha de produir la destil·leria per a maximitzar els seus ingressos, sabent que la demanda del segon *whisky* mai supera a la del primer en més del 80%? Quins serien en aquest cas els ingressos de la destil·leria?

2007

J-A PROBLEMA 2. Una fàbrica de fertilitzants produeix dos tipus d'adob, A i B, a partir de dues matèries primeres M1 i M2. Per a fabricar una tona de A fan falta 500 kg de M1 i 750 kg de M2, mentre que les quantitats de M1 i M2 utilitzades per a fabricar 1 tm. de B són 800 kg i 400 kg, respectivament. L'empresa té contractat un subministrament màxim de 10 tm. de cadascuna de les matèries primeres i ven a 1.000 € i 1.500 € cada tm. d'adob A i B, respectivament. Sabent que la demanda de B mai arriba a triplicar la de A, quantes tones de cadascun dels adobs ha de fabricar per a maximitzar els seus ingressos i quins són aquestos?

J-B PROBLEMA 2.

- a) Representa gràficament el conjunt de solucions del sistema determinat per les inequacions següents:

$$3y - 4x - 8 \leq 0, \quad y \geq -4x + 4, \quad y \geq 2, \quad x \leq 1.$$

- b) Troba els vèrtexs de la regió anterior.
- c) Calcula el punt on assoleix el mínim la funció $f(x, y) = 3x - y$ en la dita regió. Determina aquest valor mínim.